

Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова проводится в Одесском национальном университете имени И. И. Мечникова.

В программу Международной летней математической школы памяти В.А. Плотникова включены доклады по следующим направлениям:

- асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления
- математические методы оптимального управления
- многозначные уравнения и включения
- качественная теория в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления
- математическое моделирование
- теория игр

Программный комитет

Сопредседатели:

Украина : А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, А.А. Мартынюк

Россия : Ф.Л. Черноусько, Е.А. Гребенников

Болгария : А. Кендеров, Ю. Ревалски

Мексика : Л.М. Фридман

Члены программного комитета:

Украина: А.А. Бойчук, А.Н. Витюк, Ф.Г. Гаращенко, В.М. Евтухов, В.Е. Капустян, В.И. Коробов, А.М. Ковалев, Л.Д. Лещенко, А.Г. Наконечный, Р.И. Петришин, В.В. Пичкур, А.В. Плотников, В.Г. Самойленко, А.Н. Станжицкий, Ю.В. Теплинский, Д.Я. Хусаинов, И.М. Черевко, А.А. Чикрий

Россия: Л.Д. Акуленко, И.М. Ананьевский, А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев, В.И. Жуковский

Беларусь: Ф.М. Кириллова, А.И. Калинин

Грузия: И.Т. Кигурадзе

Болгария: А. Дончев, Л. Каранджулов, М. Константинов, Б. Юруков

Турция: А. Аширалиев

Организационный комитет

В.Е. Круглов (председатель)

О.Д. Кичмаренко (заместитель председателя)

Н.В. Скрипник, А.Т. Яровой, Г.А. Ефимова, А.В. Арсирый, А.Б. Васильев, А.К. Осадчий, Е.В. Платонова, Е.М. Страхов, А.П. Огуленко

Секретариат

И.Ю. Кудрявцева, Н.А. Прижимирская

Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова проводиться в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова.

У програму Міжнародної літньої математичної школи пам'яті В.О. Плотнікова включено доповіді за наступними напрямками:

- асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування
- математичні методи оптимального керування
- багатозначні рівняння і включення
- якісна теорія в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування
- математичне моделювання
- теорія ігор

Програмний комітет

Співголови:

Україна : А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, А.А. Мартинюк

Росія : Ф.Л. Черноусько, Є.А. Гребеніков

Болгарія : А. Кендеров, Ю. Ревалскі

Мексика : Л.М. Фрідман

Члени програмного комітету:

Україна: А.А. Бойчук, О.Н. Вітюк, Ф.Г. Гаращенко, В.М. Євтухов, В.Є. Капустян, В.І. Коробов, А.М. Ковальов, Л.Д. Лещенко, О.Г. Наконечний, Р.І. Петришин, В.В. Пічкур, А.В. Плотніков, В.Г. Самойленко, А.Н. Станжицький, Ю.В. Теплинський, Д.Я. Хусаїнов, І.М. Черевко, А.А. Чікрій

Росія: Л.Д. Акуленко, І.М. Анан'євський, А.Б. Васильєва, М.Г. Дмитрієв, В.І. Жуковський

Білорусь: Ф.М. Кириллова, О.Й. Калінін

Грузія: І.Т. Кігурадзе

Болгарія: А. Дончев, Л. Каранджулов, М. Константинов, Б. Юруков

Турція: А. Аширалієв

Організаційний комітет

В.Є. Круглов (голова)

О.Д. Кічмаренко (заступник голови)

Н.В. Скрипник, А.Т. Яровий, Г.О. Єфімова, А.В. Арсирій, О.Б. Васильєв, О.К. Осадчий, Є.В. Платонова, Є.М. Страхов, О.П. Огуленко

Секретаріат

І.Ю. Кудрявцева, Н.О. Прижимірска

International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov is being held at the Odessa I.I. Mechnikov National University.

The program of the International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov included reports on the following scientific subjects:

- asymptotic methods in the theory of differential equations and optimal control
- mathematical methods of optimal control
- multivalued equations and inclusion
- qualitative theory in the theory of differential equations and optimal control
- mathematical modeling
- game theory

Program committee

Co-chairmen:

Украина : A.M. Samoylenko, N.A. Perestyuk, A.A. Martynyuk

Россия : F.L. Chernousko, E.A. Grebenikov

Болгария : A. Kenderov, Yu. Revalsky

Мексика : L.M. Fridman

Members of program committee: Ukraine: N.A.Perestyuk, A.A.Boychuk, V.O.Kapustyan, A.G.Nakonechniy, A.A.Chikriy, R.I.Petrishin, Yu.V.Teplinsky, F.G.Garaschenko, D.Ya.Khusainov, A.V.Plotnikov, A.N.Vityuk, V.M.Evtuhov, D.D.Leshenko, V.I.Korobov, V.V.Pichkur.

Ukraine: A.A. Boychuk, A.N. Vityuk, F.G. Garaschenko, V.M. Evtuhov, V.E. Kapustyan, V.I. Korobov, A.M. Kovalyov, L.D. Leschenko, A.G. Nakonechniy, R.I. Petrishin, V.V. Pichkur, A.V. Plotnikov, V.G. Samoylenko, A.N. Stangitsky, Yu.V. Teplinsky, D.Ya. Khusainov, I.M. Cherevko, A.A. Chikriy

Russia: L.D.Akulenko, I.M.Ananyevskiy, A.B.Vasilyeva, M.G.Dmitriev, V.I.Jukovskiy.

Belarus: F.M.Kirillova, A.I.Kalinin

Georgia: I.T.Kiguradze

Bulgaria: A. Donchev, L. Karandjulov, M. Konstantinov, B. Yurukov

Turkey: A. Ashiraliev

Organizing committee

V.E. Kruglov (chairman)

O.D. Kichmarenko (vice-chairman)

N.V. Skrypnik, A.T. Yarovoy, G.A. Efimova, A.V. Arsiry, A.B. Valilyev, A.K. Osadchiy, E.V. Platonova, E.M. Strahov, A.P. Ogulenko

Secretariat

I.Yu. Kudryavtseva, N.A. Pryzgemirskaya



ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЛОТНИКОВ

Виктор Александрович Плотников — известный математик, основатель научной школы по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.

Виктор Александрович родился 5 января 1938 г. в городе Ленинграде в семье рабочих, во время Великой Отечественной войны был жителем блокадного Ленинграда, затем семья переехала в г. Одессу.

Природа щедро одарила Виктора Александровича светлым умом, добрым сердцем, тонкой интуицией, чувством справедливости, любовью к людям.

Среднее образование Виктор Александрович получил в Одессе.

В 1955 г. В. А. Плотников поступил в Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова. В то время на физикоматематическом факультете университета доцент С. Н. Киро создал группу студентов, факультативно специализирующуюся в области вычислительной математики, в состав которой входили В. А. Плотников, П. Д. Варбанец, В. П. Марченко, В. А. Андриенко и др. После основных обязательных занятий для этой группы читались лекции по дополнительным главам численных методов, программированию на ЭВМ, решению задач на аналоговых вычислительных машинах. Эти студенты проходили практику в вычислительных центрах МГУ и АН СССР (Москва), Института кибернетики АН УССР (Киев).

В 1959 г. была создана лаборатория вычислительной математики. В лаборатории была установлена первая в Одессе аналоговая вычислительная машина (АВМ) МПТ-9, которая позволяла решать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Затем была дополнительно установлена АВМ МН-7 (модель нелинейная), которая позволяла решать системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений до седьмого порядка с некоторыми простыми нелинейностями. Для освоения опыта работы на машинах данного типа в 1959—1960 уч. году В. А. Андриенко и В. А. Плотников прошли производственную практику в Институте прикла-

дной механики МГУ. В это же время началось научное сотрудничество лаборатории с кафедрой “Теория механизмов и деталей машин” Одесского института инженеров морского флота, которую возглавлял известный ученый профессор В. И. Небеснов. Возможности появившейся вычислительной техники открыли перспективы исследования совершенно новых задач в динамике судовых комплексов. Для решения этих задач на установленной в университете в 1962 г. цифровой вычислительной машине (ЦВМ) Урал-2 потребовалась разработка новых математических методов. В этом же году в Одесском университете несколько лекций прочитал заведующий отделом ВЦ АН СССР академик Н. Н. Моисеев. Его группа занималась проблемой оптимальных траекторий ракет с целью доставки ядерного оружия и запуска спутников. Дипломная работа В. А. Плотникова “Оптимизация траекторий многоступенчатых ракет”, написанная под руководством проф. В. Ф. Котова, укладывалась в данную тематику и в 1963—1964 гг. В. А. Плотников прошел годичную стажировку в отделе Н. Н. Моисеева. Во время стажировки В. А. Плотников посещал семинары академика Н. Н. Моисеева в ВЦ АН СССР, лекции академика Л. С. Понтрягина в Институте математики АН СССР, лекции на механико-математическом факультете МГУ. Эта стажировка определила дальнейшие научные интересы Виктора Александровича в области оптимального управления и асимптотических методов. Уже в 1965 г. В. А. Плотников выступает с докладом “Решение одной задачи оптимального управления методом Беллмана” на конференции по оптимальному математическому программированию в Академгородке Новосибирска. В этом же году на конференции, посвященной 100-летию Одесского университета, состоялся совместный доклад В. И. Небеснова и В. А. Плотникова на тему “Оптимальное управление главным двигателем при волнении”.

Используемые Н. Н. Моисеевым при исследовании оптимальных траекторий ракет асимптотические методы можно было применять к исследованию сложных систем, содержащих существенно различные по массе элементы, то есть к исследованию судовых комплексов. В связи с этим в последующие годы усиливаются взаимные научные связи Виктора Александровича с кафедрой

проф. В. И. Небеснова и расширяется круг исследуемых задач оптимального управления.

В 1969 г. В. А. Плотников защитил в Одесском университете кандидатскую диссертацию “Исследование одного класса задач оптимального управления системами с двумя степенями свободы”. Научным руководителем диссертации был проф. В. И. Небеснов. Диссертация была посвящена численно-асимптотическим методам решения задач оптимального управления.

В 1972 г. В. А. Плотников становится заведующим кафедрой вычислительной математики и в составе кафедры создается секция, занимающаяся разработкой асимптотических методов в задачах оптимального управления и их применением к исследованию динамики и оптимального управления механическими системами. В это же время создается студенческая группа, специализирующаяся в области оптимального управления. Результаты научной работы данной группы докладываются практически на всех всесоюзных конференциях по оптимальному управлению и публикуются в научных журналах.

В 1974 г. на основе секции экстремальных задач кафедры вычислительной математики была организована кафедра оптимального управления (с 1996 г. — кафедра оптимального управления и экономической кибернетики). Виктор Александрович заведовал кафедрой до последних минут своей жизни. В 1974 г. на базе Одесского университета прошла III Всесоюзная конференция по теории игр. Председателем оргкомитета конференции был Н. Н. Моисеев. Основную организационную работу по проведению конференции в университете выполняла только что созданная кафедра оптимального управления. В работе конференции приняли участие многие известные ученые в области теории игр и оптимального управления, в том числе Н. Н. Красовский, Н. Н. Воробьев, Б. Н. Пшеничный, Ю. Б. Гермейер, М. С. Никольский.

В 1980 г. В. А. Плотников защитил в Ленинградском университете докторскую диссертацию на тему “Асимптотические методы в задачах оптимального управления” (научный консультант проф. В. И. Небеснов, оппоненты академик Н. Н. Моисеев, проф. А. А. Первозванский, проф. В. С. Новоселов).

С 1982 г. В. А. Плотников — профессор кафедры оптимального управления. В 1987—1988 уч. году — декан механико-математического факультета. С 1986 г. — председатель специализированного ученого совета по защите кандидатских диссертаций по математике при Одесском университете. В 1997 г. получил звание Соросовского профессора.

В. А. Плотников основал научную школу по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной и разрывной правой частью. Виктором Александровичем и его учениками было получено обоснование теорем Н. Н. Боголюбова и А. Н. Тихонова для дифференциальных включений, обосновано построение асимптотического решения задачи Коши и краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные возмущения, запаздывание, импульсные воздействия на конечном и бесконечном промежутках, доказаны теоремы существования и единственности решений квазидифференциальных уравнений в локально-компактных и полных метрических пространствах, обоснован метод усреднения для квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах, разработан алгоритмы численных и численно-асимптотических методов решения задач оптимального управления. Разработка этих вопросов имеет значение не только как обобщение теории дифференциальных уравнений, но и благодаря многочисленным приложениям к исследованию задач оптимального управления, теории игр, экономики. Результаты в данном направлении положили начало математическим исследованиям асимптотических методов в теории дифференциальных включений в России, Белоруссии, Болгарии, Польше, Франции, США. Эти результаты докладывались на многочисленных международных, всесоюзных и республиканских конференциях.

В. А. Плотников опубликовал более 250 научных и научно-методических работ, в т.ч. 6 монографий.

Математический талант ученого сочетался с педагогической деятельностью Виктора Александровича. Он блистательно читал лекции, много сил отдал работе со своими учениками. Виктор Александрович подготовил 21 кандидата наук из Украины, Алжира, Болгарии, Вьетнама, Иордании.

В своей научной деятельности Виктор Александрович сотрудничал с представителями различных математических школ: Института математики АН СССР, кафедры оптимального управления МГУ, кафедры вычислительной математики физического факультета МГУ, Института математики Белорусской АН, Санкт-Петербургского университета, а также Свердловской, Иркутской, Новосибирской, Киевской, Харьковской, Черновицкой и Болгарской научных математических школ. Его научные результаты широко известны не только в Украине и странах бывшего Советского Союза, но и за рубежом.

Лекции Виктора Александровича Плотникова слушали не только в Украине, но и в Болгарии, Польше.

В. А. Плотников был членом редакционных коллегий в журналах “Вестник Одесского государственного университета”, “Нелинейные колебания”; рецензировал статьи во многих отечественных и зарубежных журналах.

4 сентября 2006 г. Виктора Александровича не стало. Всю свою жизнь он посвятил математике, он ежедневно и до последнего вздоха занимался научной работой.

Открытость, искренность, преданность делу всегда выделяли Виктора Александровича. В нашей памяти Виктор Александрович останется как талантливый ученый и замечательный учитель, который любил жизнь во всех ее проявлениях.

1 Введение

Научные работы В.А. Плотникова охватывают широкий круг сложных и актуальных задач теории дифференциальных уравнений и оптимального управления, которые относятся к разработке нового направления этой теории - дифференциальным уравнениям с многозначной и разрывной правой частью, квазидифференциальным уравнениям в метрических пространствах. В.А. Плотников разработал алгоритмы асимптотического решения для достаточно широкого класса дифференциальных включений, доказал глубокие теоремы Н.Н. Боголюбова и А.Н. Тихонова по обоснованию асимптотических методов для дифференциальных уравнений с многозначной и разрывной правой частью и квазидифференциальных уравнений, разработал алгоритмы численно - асимптотического решения задач управления, доказал теоремы существования и единственности решений квазидифференциальных уравнений в локально компактных и полных метрических пространствах. Разработка теории этих уравнений имеет значение не только как обобщение теории дифференциальных уравнений, но и благодаря их многочисленным приложениям к исследованию задач оптимального управления, теории игр, экономики. Результаты в этом направлении положили начало математическим исследованиям асимптотических методов в теории дифференциальных включений в России, Беларуси, Болгарии, Польше, Франции, США и др.

В.А. Плотников опубликовал более 250 научных работ, в том числе 6 монографий.

В данном обзоре мы остановимся более подробно на результатах, полученных В.А. Плотниковым по обоснованию метода усреднения для обычных дифференциальных включений и диф-

¹Полный текст статьи опубликован в журнале "Вісник Одеського університету": Плотников А.В., Скрипник Н.В. Обзор результатов В.А. Плотникова // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2010. — Т. 15, вип. 18. — С. 71-87.

ференциальных включений, подвергающихся импульсному воздействию.

2 Усреднение дифференциальных включений

Для дифференциальных включений теорема, являющаяся аналогом первой теоремы Н.Н. Боголюбова, была доказана В.А. Плотниковым в работах [9, 11, 13], что стало толчком для дальнейшего развития данного метода для такого типа уравнений.

2.1 Схема полного усреднения для дифференциальных включений

2.1.1 Усреднение на конечном промежутке

Пусть задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+$ - время, $x \in \mathbb{R}^n$ - фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $X : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\text{comp}(\mathbb{R}^n)(\text{conv}(\mathbb{R}^n))$ - пространство, состоящее из всех непустых компактных (и выпуклых) подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа:

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 : A \subset B + S_r(0), B \subset A + S_r(0)\},$$

$S_r(a)$ - шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Поставим в соответствие включению (1) следующее усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in \varepsilon \bar{X}(\xi), \quad \xi(0) = x_0, \quad (2)$$

где

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt. \quad (3)$$

Здесь интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна [23], а сходимость - в смысле метрики Хаусдорфа.

Теорема 1. [9, 11]. Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:

- 1) отображение $X(t, x)$ непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по x ;
- 2) равномерно относительно x в области D существует предел (3);

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого решения $\xi(t)$ включения (2) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что выполняется неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta; \quad (4)$$

- 2) для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $\xi(t)$ включения (2) такое, что выполняется неравенство (4).

Таким образом, справедлива оценка:

$$h(\bar{R}(t), clR(t)) \leq \eta, \quad (5)$$

где $\bar{R}(t)$ – сечение семейства решений усредненного включения, $clR(t)$ – замыкание сечения семейства решений исходного включения.

Замечание 1. Если условие 3) не выполняется, то его можно заменить следующим условием:

- 3') для всех $x_0 \in D' \subset D$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D при $\tau \in [0, L^*]$, $\tau = \varepsilon t$.

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L \in [0, L^*]$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы утверждения 1) и 2) теоремы 1.

В случае, когда отсутствует равномерная сходимость в (3), в работах В.А. Плотникова доказана следующая теорема, которая является обобщением результата А.Н. Филатова [22] на случай дифференциальных включений:

Теорема 2. [9, 11]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

- 1) отображение $X(t, x)$ непрерывно, локально удовлетворяет условию Липшица по x ;
- 2) в каждой точке $x \in D$ существует предел (3) ;
- 3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta, L, x_0) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы утверждения 1) и 2) теоремы 1.

Замечание 2. Оценки, полученные в теореме 2, качественно отличаются от соответствующих оценок теоремы 1. Внешнее совпадение по записи утверждений теорем 1 и 2 приводит иногда к неправильному их пониманию. Действительно, в теореме 1 утверждается, что неравенство (4) справедливо равномерно для всего семейства траекторий $x(t)$ и $\xi(t)$ с совпадающими начальными условиями, т.е. утверждается существование $\varepsilon(\eta, L)$. Оценка, полученная в теореме 2, справедлива только для решений $x(t)$ и $\xi(t)$, начинающихся в фиксированной начальной точке x_0 , т.е. утверждается существование $\varepsilon(x_0, \eta, L)$.

Замечание 3. Если функция $X(t, x)$ периодична по t , то можно получить более точные оценки, а именно показать, что для любого $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon^0(L) > 0$ и $C(L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$:

- 1) для любого решения $\xi(t)$ включения (2) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что справедливо неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq C\varepsilon; \quad (6)$$

- 2) для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $\xi(t)$ включения (2) такое, что справедливо неравенство (6).

2.1.2 Усреднение на бесконечном промежутке

Для обобщения теоремы на бесконечный промежуток В.А. Плотников распространил понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений на случай дифференциальных включений

[12, 15]. При этом использовалось понятие R -решения дифференциального включения, которое было введено в [6, 7].

Определение 1. [6, 7]. R -решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in X(t, x), \quad x(0) = x_0 \in X_0$$

называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $R : \mathbb{R} \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $R(0) = X_0$, для которого почти всюду выполнено соотношение

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} h \left(R(t + \Delta), \bigcup_{x \in R(t)} \left\{ x + \int_t^{t+\Delta} X(s, x) ds \right\} \right) = 0. \quad (7)$$

Теорема 3. [12, 15]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

1) отображение $X(t, x)$ непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по x ;

2) равномерно относительно t и x в области Q существует предел

$$\overline{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt; \quad (8)$$

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D ;

4) R -решение дифференциального включения (2) асимптотически устойчиво.

Тогда для любого $\eta \in (0, \rho]$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ при $t \geq 0$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $\xi(t)$ включения (2) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что выполняется неравенство (4);

2) для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $\xi(t)$ включения (2) такое, что выполняется неравенство (4).

Таким образом, справедлива оценка

$$h(R(t), \overline{R}(t)) \leq \eta,$$

где $R(t), \bar{R}(t)$ – R –решения дифференциальных включений (1) и (2) соответственно, $R(0) = \bar{R}(0) \subset D'$.

Пример 1. Рассмотрим следующее дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon\{-x + [-1, 1] + \cos t\}, \quad x(0) \in [2, 3],$$

где $x \in D = [-6, 6]$.

Усредненное включение имеет вид

$$\dot{\xi} \in \varepsilon\{-\xi + [-1, 1]\}, \quad \xi(0) \in [2, 3].$$

R –решение усредненного включения $\bar{R}(t) = [3e^{-\varepsilon t} - 1; 2e^{-\varepsilon t} + 1]$ является асимптотически устойчивым. Выполнение всех остальных условий теоремы 3 проверяется очевидным образом.

R –решение исходного включения имеет вид

$$R(t) = \left[\left(3 - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) e^{-\varepsilon t} + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos t + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \sin t - 1; \right. \\ \left. \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) e^{-\varepsilon t} + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos t + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \sin t + 1 \right].$$

Следовательно,

$$h(R(t), \bar{R}(t)) \leq \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} e^{-\varepsilon t} + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} < 3 \varepsilon.$$

Таким образом, при $\varepsilon^0 = \frac{\eta}{3}$ справедливо утверждение теоремы.

В работах В.А. Плотникова также рассматривалась возможность усреднения дифференциальных включений на бесконечном промежутке, используя устойчивость отдельных траекторий.

Теорема 4. [1]. Пусть в области Q выполнены условия 1) – 3) теоремы 3 и, кроме того,

4) решение $\xi(t)$ включения (2) слабо асимптотически устойчиво.

Тогда для любого $\eta \in (0, \rho]$ существует такое $\varepsilon^0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ существует решение $x(t)$ дифференциального включения (1), для которого при $t \geq 0$ справедлива оценка (4).

Замечание 4. Утверждение теоремы относится не ко всем решениям дифференциального включения (2), а только к конкретному решению $\xi(t)$. Поэтому дифференциальное включение (2) может иметь решения не продолжимые при $t \geq 0$ и решения, не являющиеся слабо асимптотически устойчивыми.

Таким образом, из теоремы не следует близость R -решений исходного и усредненного включений.

Пример 2. Пусть

$$\dot{x} \in \varepsilon\{-2, 2\} \cdot x + e^{-t}, \quad x(0) \in [1, 2]. \quad (9)$$

Усредненное включение имеет вид:

$$\dot{\xi} \in \varepsilon[-2, 2] \cdot \xi, \quad \xi(0) \in [1, 2].$$

R - решение усредненного включения $\bar{R}(t) = [e^{-2\varepsilon t}, 2e^{2\varepsilon t}]$ не является асимптотически устойчивым, так как

$$h(\bar{R}_1(t), \bar{R}(t)) = h(\bar{R}_1(0), \bar{R}(0))e^{2\varepsilon t},$$

где $\bar{R}_1(t)$ — R - решение усредненного включения с начальным множеством $\bar{R}_1(0)$.

При этом для решения усредненного включения $\xi(t) = 2e^{2\varepsilon t}$ ближайшим решением исходного включения является

$$x(t) = \left(2 - \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}\right) e^{2\varepsilon t} + \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} e^{-t}$$

и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|\xi(t) - x(t)\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} (e^{2\varepsilon t} - e^{-t}) = \infty.$$

В то же время, например, решение $\xi_1(t) = 1.5e^{\varepsilon t}$ является слабо асимптотически устойчивыми и непосредственно проверяется, что это решение является также решением включения (9).

Замечание 5. В формулировке теоремы 4 можно заменить условие 4) следующим:

4') решение $\xi(t)$ включения (2) асимптотически устойчиво.

Тогда утверждение теоремы принимает следующий вид:
 для любого $\eta \in (0, \rho]$ существуют такие $\varepsilon^0 > 0$ и $\sigma > 0$, что
 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ для всех решений $x(t)$ дифференциального вклю-
 чения (1) с начальными условиями $\|x(t_0) - x^0\| \leq \sigma$, при $t \geq t_0$
 справедлива оценка (4).

При выполнении условия 4') из теоремы следует близость
 R -решений исходного и усредненного включений.

Пример 3. Рассмотрим следующее дифференциальное вклю-
 чение

$$\dot{x} \in \varepsilon \{ [-2, -1] x + 2 \cos t \}, \quad x(0) = x_0. \quad (10)$$

Для решения $\xi(t)$ усредненного включения

$$\dot{\xi} \in \varepsilon [-2, -1] \xi, \quad \xi(0) = x_0$$

справедлива следующая оценка:

$$x_0 e^{-2\varepsilon t} \leq \xi(t) \leq x_0 e^{-\varepsilon t}. \quad (11)$$

В силу (11) решение $\xi(t) \equiv 0$ усредненного включения явля-
 ется асимптотически устойчивым.

Для решений исходного включения (10) справедливы неравен-
 ства

$$\begin{aligned} \left(x_0 - \frac{4\varepsilon^2}{1 + 4\varepsilon^2} \right) e^{-2\varepsilon t} + \frac{4\varepsilon^2}{1 + 4\varepsilon^2} \cos t + \frac{2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon^2} \sin t &\leq x(t) \leq \\ &\leq \left(x_0 - \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) e^{-\varepsilon t} + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos t + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \sin t. \end{aligned}$$

Для всех решений $x(t)$ исходного включения выполняется нера-
 венство $\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta$ при $\varepsilon^0 \leq \frac{\eta}{5}$.

2.1.3 Дифференциальные включения с полунепрерыв- ной правой частью

В работах В.А. Плотникова рассматривался также часто встреча-
 ющийся в приложениях случай, когда правая часть не является
 непрерывной по фазовой переменной, а является лишь полуне-
 прерывной сверху.

Теорема 5. [16]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

1) многозначное отображение $X : Q \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху по x , 2π -периодично и измеримо по t , равномерно ограничено суммируемой функцией $M(t)$ такой, что для любых $t_2 > t_1 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} M(t) dt \leq M_0(t_2 - t_1);$$

2) многозначное отображение $\overline{X}(x)$ удовлетворяет условию Липшица;

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ для любого решения $x(t)$ дифференциального включения (1) существует решение $\xi(t)$ дифференциального включения (2) такое, что справедлива оценка

$$\|\xi(t) - x(t)\| \leq \eta. \quad (12)$$

Замечание 6. В теореме утверждается, что $R(t, \varepsilon) \subset R(t, 0) + S_\eta(0)$, где $R(t, \varepsilon)$ – R -решение системы (1), соответствующее параметру ε . Справедливость включения $R(t, 0) \subset R(t, \varepsilon) + S_\eta(0)$ не утверждается, т.е. доказывается только полунепрерывность сверху по ε многозначного отображения $R(t, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$.

2.1.4 Аппроксимация пучков решений при отсутствии среднего

В работах [16, 1] был рассмотрен случай, когда предел (3) не существует, но существуют такие многозначные отображения X^- , $X^+ : D \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, что справедливы равенства

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta \left(X^-(x), \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt \right) = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta \left(\frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, X^+(x) \right) = 0, \quad (14)$$

где $\beta(\cdot, \cdot)$ - полуотклонение множеств по Хаусдорфу:

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \quad \rho(a, B) = \inf_{b \in B} \|a - b\|.$$

Тогда включению (1) можно поставить в соответствие следующие включения:

$$\dot{x}^- \in \varepsilon X^-(x^-), \quad x^-(0) = x_0, \quad (15)$$

$$\dot{x}^+ \in \varepsilon X^+(x^+), \quad x^+(0) = x_0. \quad (16)$$

Теорема 6. [1]. Пусть в области Q выполняются следующие условия:

1) многозначное отображение $X(t, x)$ равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по x , измеримо по t ;

2) многозначное отображение $X^-(x)$ равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица;

3) равномерно относительно x в области D существует предел (13);

4) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (15) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ для любого решения $x^-(t)$ включения (15) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что

$$\|x^-(t) - x(t)\| \leq \eta. \quad (17)$$

Теорема 7. [1]. Пусть в области Q выполняются следующие условия:

1) многозначное отображение $X(t, x)$ равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по x , измеримо по t ;

2) многозначное отображение $X^+(x)$ равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица;

3) равномерно относительно x в области D существует предел (14);

4) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (16) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0 > 0(\eta, L)$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $x^+(t)$ включения (16) такое, что

$$\|x^+(t) - x(t)\| \leq \eta. \quad (18)$$

Замечание 7. Если $R(t)$, $R^+(t)$, $R^-(t)$ - сечения пучков решений включений (1), (15) и (16) соответственно, то

$$R^-(t) \subset R(t) + S_\eta(0), \quad R(t) \subset R^+(t) + S_\eta(0). \quad (19)$$

Замечание 8. В качестве отображений $X^-(x)$ и $X^+(x)$ можно использовать верхний и нижний предел последовательности множеств [1]:

$$\overline{X}^-(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, \quad \overline{X}^+(x) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt.$$

Множества $\overline{X}^-(x)$ и $\overline{X}^+(x)$ являются соответственно максимальным и минимальным по включению из множеств $X^-(x)$ и $X^+(x)$, т.е. для любых $X^-(x)$ и $X^+(x)$ выполняются включения

$$X^-(x) \subset \overline{X}^-(x), \quad \overline{X}^+(x) \subset X^+(x).$$

Замечание 9. Если предел (3) существует, то $\overline{X}^-(x) = \overline{X}^+(x) = \overline{X}(x)$ и из теорем 6 и 7 следует теорема 1.

Замечание 10. Если предел (3) существует, то его вычисление обычно осуществляется с помощью опорной функции. При этом часто точное значение опорной функции вычислить невозможно и множества $X^-(x)$ и $X^+(x)$ появляются в результате приближенного вычисления множества $\overline{X}(x)$.

Пример 4. Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon \left[\begin{pmatrix} 2 \cos^2 t & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 t \end{pmatrix} x + S_{r(t)}(0) \right], \quad x(0) = x_0, \quad (20)$$

где $r(t) = 2 + e^{-t} + 0.5\sqrt{2}\sin(\ln(t+1))$.

Очевидно, что матрица

$$\bar{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 0 \\ 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Усредним многозначное отображение $U(t) = S_{r(t)}(0)$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T S_{r(t)}(0) dt &= S_1(0) \left[2 - \frac{e^{-T}}{T} + \frac{(T+1)\sqrt{2}}{4T} (\sin(\ln(T+1)) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\ln(T+1))) + \frac{\sqrt{2}+4}{4T} \right], \end{aligned}$$

то среднее $\overline{U(t)}$ в данном случае не существует, но очевидно, что существуют такие множества U^- и U^+ , что выполняются условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta \left(U^-, \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt \right) = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta \left(\frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt, U^+ \right) = 0 \quad (22)$$

и

$$U^- = S_{r_1}(0), \quad U^+ = S_{r_2}(0), \quad 0 \leq r_1 \leq 1.5, \quad r_2 \geq 2.5.$$

Тогда включения (15) и (16) примут следующий вид:

$$\dot{x}^- \in \varepsilon [x^-(t) + S_{r_1}(0)], \quad x^-(0) = x_0,$$

$$\dot{x}^+ \in \varepsilon [x^+(t) + S_{r_2}(0)], \quad x^+(0) = x_0.$$

Запишем R -решения полученных включений при помощи формулы Коши

$$R^-(t) = e^{\varepsilon t} x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)} S_{r_1}(0) ds = e^{\varepsilon t} x_0 + (e^{\varepsilon t} - 1) S_{r_1}(0).$$

Аналогично записывается

$$R^+(t) = e^{\varepsilon t} x_0 + (e^{\varepsilon t} - 1) S_{r_2}(0).$$

Очевидно, что

$$\overline{U}^- = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = S_{1.5}(0),$$

$$\overline{U}^+ = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = S_{2.5}(0).$$

Тогда

$$R^-(t) \subset \overline{R}^-(t), \quad \overline{R}^+(t) \subset R^+(t),$$

где $\overline{R}^-(t) = e^{\varepsilon t} x_0 + (e^{\varepsilon t} - 1) S_{1.5}(0)$, $\overline{R}^+(t) = e^{\varepsilon t} x_0 + (e^{\varepsilon t} - 1) S_{2.5}(0)$.

Для исходного включения (20) выполнены все условия теорем 6, 7 и, следовательно, для любого $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы включения (19).

2.2 Схема частичного усреднения для дифференциальных включений

Для дифференциальных включений стандартного вида можно проводить частичное усреднение включений, т.е. усреднять только некоторые слагаемые или сомножители. Такой вариант использования метода усреднения также приводит к упрощению исходного включений и бывает полезен в тех случаях, когда среднее некоторых функций не существует или сохранение их в системе не усложняет ее исследования.

Наряду с дифференциальным включением (1) рассмотрим частично усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in \varepsilon \overline{X}(t, \xi), \quad \xi(0) = x_0, \quad (23)$$

где

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} h \left(\int_0^T X(t, x) dt, \int_0^T \bar{X}(t, x) dt \right) = 0. \quad (24)$$

Теорема 8. [13]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

1) отображения $X(t, x), \bar{X}(t, x)$ непрерывны, равномерно ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x ;

2) равномерно относительно x в области D существует предел (24);

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$, $\varepsilon \in (0, \sigma]$ и $t \geq 0$ решения $\xi(t)$ включения (23) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ на промежутке $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $\xi(t)$ включения (23) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что выполняется неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta; \quad (25)$$

2) для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $\xi(t)$ включения (23) такое, что выполняется неравенство (25).

Замечание 11. Если одно из множеств $X(t, x)$ или $\bar{X}(t, x)$ вырождается в точку, то соответствующее включение становится дифференциальным уравнением, для которого при $t \geq 0$ существует единственное решение. В этом случае в η -трубке данного решения лежит все семейство решений второго включения.

Замечание 12. Если сходимость в (24) имеет место в каждой точке $x \in D$, то аналогично теореме 2 можно доказать существование такого $\varepsilon^0(\eta, L, x_0) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ выполняются утверждения теоремы 8.

Замечание 13. Если отображения $X(t, x)$ и $\bar{X}(t, x)$ периодичны по t , то в оценке (25) величину η можно заменить на $C\varepsilon$.

Замечание 14. Если $\bar{X}(t, x) \equiv \bar{X}(x)$, то из теоремы 8 следует обоснование схемы полного усреднения.

Замечание 15. Пусть отображение $\bar{X}(t, x)$ имеет вид

$$\bar{X}(t, x) = \left\{ X_i(x) = \frac{1}{T} \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} X(t, x) dt, i\omega < t \leq (i+1)\omega, i = 0, 1, \dots \right\}.$$

Разбивая промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом ω , можно показать, что имеет место оценка (25) с $\eta = C\varepsilon$.

Замечание 16. Аналогично изложенному выше в [15, 19] были рассмотрены различные схемы усреднения для интегро - дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in \varepsilon X \left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds \right), \quad x(0) = x_0,$$

где $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

3 Усреднение дифференциальных включений с импульсами

3.1 Усреднение включений с импульсами в фиксированные моменты времени

В данном разделе приведем результаты В.А. Плотникова по обоснованию метода полного и частичного усреднения на конечном и бесконечном промежутках для дифференциальных включений, подвергающихся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени.

3.1.1 Схема полного усреднения

Усреднение на конечном промежутке. Рассмотрим дифференциальное включение с многозначными импульсами вида

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t, x), \quad t \neq \tau_i, \quad x(0) \in X_0, \quad (26)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in I_i(x).$$

Если для любого $x \in D$ существует предел

$$Y(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_t^{t+T} X(t, x) dt + \sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(x) \right), \quad (27)$$

то в соответствие включению (26) поставим усредненное включение

$$\dot{y} \in \varepsilon Y(y), \quad y(0) \in X_0. \quad (28)$$

Теорема 9. [8]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

1) многозначные отображения $X : Q \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $I_i : D \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ непрерывны, равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица по x ;

2) равномерно относительно $t \geq 0$ и $x \in D$ существует предел (27) и

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d < \infty,$$

где $i(t, t+T)$ — количество точек последовательности $\{\tau_i\}$ на промежутке $(t, t+T]$;

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (28) вместе с некоторой ρ — окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $y(t)$ включения (28) существует решение $x(t)$ включения (26) такое, что справедливо неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta; \quad (29)$$

2) для любого решения $x(t)$ включения (26) существует решение $y(t)$ включения (28) такое, что справедливо неравенство (29).

Следствием данной теоремы является следующее утверждение:

Теорема 10. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены условия 1), 2) теоремы 9 и, кроме того,

3) для всех $X_0 \subset D' \subset D$ и $t \geq 0$ R -решения включения (28) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого R -решения $Y(t)$ включения (28) существует R -решение $X(t)$ включения (26) такое, что справедливо неравенство

$$h(X(t), Y(t)) < \eta; \quad (30)$$

2) для любого R -решения $X(t)$ включения (26) существует R -решение $Y(t)$ включения (28) такое, что справедливо неравенство (30).

Усреднение на бесконечном промежутке. Рассмотрим для включения (26) усредненное дифференциальное включение (28).

Теорема 11. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены условия 1) – 3) теоремы 9 и, кроме того,

4) R -решения включения (28) равномерно асимптотически устойчивы.

Тогда для любого $\eta \in (0, \rho]$ существует такое $\varepsilon^0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$h(R(t, \varepsilon), \bar{R}(\varepsilon t)) \leq \eta,$$

где $R(t, \varepsilon)$ – R -решение включения (26), $\bar{R}(\varepsilon t)$ – R -решение включения (28), $R(0, \varepsilon) = \bar{R}(0) = X_0$.

Теорема 12. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены следующие условия 1), 2) теоремы 9 и, кроме того,

3) включение (28) имеет периодическое R -решение $\bar{R}(\tau)$, траектория которого C является асимптотически орбитально устойчивой и лежит вместе с некоторой ρ -окрестностью в области D .

Тогда для любого $\eta \in (0, \rho]$ можно указать такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\eta_0 \in (0, \eta]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$h(R(t), C) \leq \eta,$$

где $R(t)$ – R -решение включения (26), которое в начальный момент удовлетворяет условию $h(R(0), C) \leq \eta_1$.

Теорема 13. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены следующие условия 1), 2) теоремы 9 и, кроме того,

3) включение (28) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\bar{R}^0$, которое лежит вместе с некоторой ρ -окрестностью в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho)$ существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\eta_0 \in (0, \eta]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$h(R(t), \bar{R}^0) \leq \eta,$$

где $R(t)$ – R -решение включения (26), которое в начальный момент удовлетворяет условию $h(R(0), \bar{R}^0) \leq \eta_1$.

3.1.2 Схема частичного усреднения

Наряду с импульсным дифференциальным включением (26) рассмотрим импульсное дифференциальное включение

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{X}(t, y), \quad t \neq \nu_j, \quad y(0) \in X_0, \quad (31)$$

$$\Delta y|_{t=\nu_j} \in K_j(y),$$

где для любого $x \in D$ существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} h \left(\int_t^{t+T} X(t, x) dt + \sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(x), \right. \\ \left. \int_t^{t+T} \bar{X}(t, x) dt + \sum_{t \leq \nu_j < t+T} K_j(x) \right) = 0. \quad (32)$$

Теорема 14. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены следующие условия:

1) многозначные отображения $X, \bar{X} : Q \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ $I_j, K_j : D \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ непрерывны, равномерно ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x ;

2) равномерно относительно $x \in D$ существует предел (32)
и

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d < \infty, \quad \frac{1}{T} j(t, t+T) \leq d < \infty,$$

где $i(t, t+T)$ и $j(t, t+T)$ — количество точек последовательностей $\{t_j\}$ и $\{s_j\}$ соответственно на промежутке $[t, t+T]$;

3) для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (31) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо следующее неравенство

$$\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq \eta, \quad (33)$$

где $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ — решения включений (26) и (31) соответственно, с начальными условиями $x(0, \varepsilon) = y(0, \varepsilon) = x_0 \in X_0$.

Теорема 15. [8, 17]. Пусть в области Q выполнены условия 1) и 2) теоремы 14 и, кроме того,

3) для всех $X_0 \subset D' \subset D$ и $t \geq 0$ R -решения включения (31) вместе с некоторой ρ -окрестностью лежат в области D .

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho]$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо следующее неравенство

$$h(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)) \leq \eta, \quad (34)$$

где $X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)$ — R -решения включений (26) и (31) соответственно, $X(0, \varepsilon) = Y(0, \varepsilon) = X_0$.

3.2 Усреднение включений с импульсами в нефиксированные моменты времени

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсными воздействиями в нефиксированные моменты времени

$$\dot{x} \in F^1(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad t \neq \varepsilon\tau_i^1(x), \quad t \neq \sigma_i^1(x), \quad (36)$$

$$\Delta x|_{t=\varepsilon\tau_i^1(x)} \in \varepsilon I_i^1(x), \quad (37)$$

$$\Delta x|_{t=\sigma_p^1(x)} \in K_p^1(x). \quad (38)$$

Включению (36) - (38) поставим в соответствие следующее дифференциальное включение

$$\dot{y} \in F^2(t, y, \varepsilon), \quad y(0) = x_0, \quad t \neq \varepsilon \tau_i^2(x), \quad t \neq \sigma_i^2(y), \quad (39)$$

$$\Delta y|_{t=\varepsilon \tau_i^2(y)} \in \varepsilon I_i^2(y), \quad (40)$$

$$\Delta y|_{t=\sigma_p^2(y)} \in K_p^2(y), \quad (41)$$

где $t \in [0, L]$ — время, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, ε — малый параметр, импульсные поверхности $\tau_i^j, \sigma_i^j : D \rightarrow \mathbb{R}$, многозначные отображения $F^j : [0, L] \times D \times (0, \varepsilon] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $I_i^j, K_p^j : D \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1, k}$, $p = \overline{1, r}$, $j = 1, 2$.

Пусть $T_D(x)$ — касательный конусом к множеству D в точке $x \in D$.

Теорема 16. [8]. Пусть в области $Q = D \rightarrow \mathbb{R}$, многозначные отображения $F^j : [0, L] \times D \times (0, \varepsilon]$ выполнены следующие условия:

1) многозначные отображения $F^j(t, x, \varepsilon)$, $I_i^j(x)$ и функции $\tau_i^j(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x , непрерывны по t и, кроме того, $F^j(t, x, \varepsilon) \subset T_D(x)$, $x + \varepsilon I_i^j(x) \subset D$;

2) многозначные отображения $F^j(t, x, \varepsilon)$ и $I_i^j(x)$ равномерно ограничены постоянной M ;

3) равномерно относительно $(t, x) \in Q$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} h \left(\int_t^{t+\Delta} F^1(t, x, \varepsilon) dt + \varepsilon \sum_{t < \varepsilon \tau_i^1(x) < t+\Delta} I_i^1(x), \right. \\ \left. \int_t^{t+\Delta} F^2(t, x, \varepsilon) dt + \varepsilon \sum_{t < \varepsilon \tau_i^2(x) < t+\Delta} I_i^2(x) \right) = 0;$$

4) числа $J_j(t, t + \Delta)$, $j = 1, 2$ асимптотически малых импульсов на промежутке $[t, t + \Delta]$ решений (36), (37) и (39), (40) соответственно удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\Delta} J_j(t, t + \Delta) \leq \frac{A}{\varepsilon} < \infty;$$

5) поверхности $t = \varepsilon \tau_i^j(x)$ не пересекают друг друга и для каждого $x \in D$, $z \in \varepsilon I_i^j$, $j = 1, 2$, справедливы неравенства

$$\tau_i^j(x) \geq \tau_i^j(x + z), \quad |\tau_{i+1}^j(x) - \tau_i^j(x)| \leq M;$$

6) отображения $K_i^j(x)$ и функции $\sigma_j^i(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной μ , кроме того, $x + K_i^j(x) \subset D$, $x \in D$;

7) поверхности $t = \sigma_j^i(x)$ не пересекают друг друга и $\sigma_j^i(x) \geq \sigma_j^i(x + z)$ для каждого $x \in D$ и $z \in K_i^j$, $j = 1, 2$;

8) справедливы неравенства:

$$\mu M < 1, \quad h(K_i^1(x), K_i^2(x)) \leq \eta, \quad |\sigma_i^1(x) - \sigma_i^2(x)| \leq \eta.$$

Тогда для каждого $\xi > 0$ существует $\eta > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для каждого решения $x(t)$ включения (36) - (38) существует решение $y(t)$ включения (39) - (41) с начальным условием $\|y_0 - x_0\| \leq \delta$, для которого справедлива следующая оценка

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta,$$

$$t \in [0, L] \setminus \left\{ \bigcup_p [s_p^2 - \delta_p, s_p^2 + \delta_p] \bigcup_i [t_i^2 - \Delta_i, t_i^2 + \Delta_i] \right\},$$

где $s_p^2 = \sigma_p(y((s_p^2)))$, $t_i^2 = \tau_i(y((t_i^2)))$, причем $\sum_p \delta_p + \sum_i \Delta_i < C\eta$.

Замечание 17. Аналогично тому, как это делается для дифференциальных уравнений [2], из теоремы 16 следуют теоремы по обоснованию метода усреднения для импульсных дифференциальных включений.

Заключение

В данном обзоре нами не были рассмотрены работы В.А. Плотникова, посвященные усреднению дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в случае скользящего режима [16], применению метода усреднения и дифференциальных включений

при исследовании задач управления [3, 4, 5, 11, 14, 15, 21], усреднению дискретных включений [18], вопросам асимптотического исследования сингулярно возмущенных дифференциальных включений и обобщению теоремы А.Н. Тихонова на дифференциальные включения [10, 15].

1. **Куратовский К.** Топология. Т.1 / Куратовский К. — М. : Мир, 1966. — 788 с.
2. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике / Митропольский Ю. А. — К. : Наукова думка, 1971. — 440 с.
3. **Небеснов В. И.** К динамике энергетической системы с двумя степенями свободы / В. И. Небеснов, В. А. Плотников // Машиноведение АН СССР. — 1968. — № 1. — С. 18-23.
4. **Небеснов В. И.** Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов / В. И. Небеснов, В. А. Плотников. — М.: Изд-во Рекламинформбюро ММФ, 1977. — 72 с.
5. **Небеснов В. И.** Оптимальное управление ВРШ на волнении / В. И. Небеснов, В. А. Плотников, Ф. Я. Кузюшин. — М. : Пищевая промышленность, 1974. — 87 с.
6. **Панасюк А. И.** Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления / А. И. Панасюк, В. И. Панасюк. — Минск : Изд-во БГУ, 1977. — 206 с.
7. **Панасюк А. И.** Об одном уравнении, порожденном дифференциальным включением / А. И. Панасюк, В. И. Панасюк // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 3. — С. 429-437.
8. **Импульсные** дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
9. **Плотников В. А.** Асимптотические методы в задачах оптимального управления / Плотников В. А. — Одесса : Изд-во Одесского госуниверситета, 1976. — 102 с.
10. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений / В. А. Плотников. — Одесса : ОГУ, 1979. — 78 с. — Деп. ВИНТИ, №540-79.
11. **Плотников В. А.** Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления / В. А. Плотников // Дифференц. уравнения. — 1979. — № 8. — С. 1427-1433.
12. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений / В. А. Плотников // Укр. мат. журн. — 1979. — Т. 31, № 5. — С. 573-576.

13. **Плотников В. А.** Частичное усреднение дифференциальных включений / В. А. Плотников // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 6. — С. 947-952.
14. **Плотников В. А.** Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения / В. А. Плотников // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 30-37.
15. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления / Плотников В. А. — Киев-Одесса : Изд-во Лыбидь, 1992. — 188 с.
16. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. — Одесса : АстроПринт, 1999. — 354 с.
17. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 11. — С. 1526-1532.
18. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложения к задачам управления / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. - 2004. - Т. 7, № 2. - С. 241-254.
19. **Плотников В. А.** Об одной схеме усреднения интегро-дифференциальных включений / В. А. Плотников, О. Г. Рудык // Известия ВУЗов, Математика. — 1989. — № 5. — С. 78-81.
20. **Плотников В. А.** Об усреднении дифференциальных включений / В. А. Плотников, В. М. Савченко // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 11. — С. 1572-1575.
21. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений движения в задачах периодической оптимизации / В. А. Плотников, Н. А. Смирнова // Акустика и ультразвуковая техника. — 1982. — Вып. 17. — С. 41-45.
22. **Филатов А. Н.** Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений / Филатов А. Н. — Ташкент : Фан, 1974. — 216 с.
23. **Aumann R. J.** Integrals of set-valued functions / R. J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — № 12. — P. 1-12.
24. **Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities** / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik - (De Gruyter Studies in Mathematics: 40). — Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH&Co., 2011. — 307 p.
25. **Klimchuk S.** Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions / S. Klimchuk, A. Plotnikov, N. Skripnik // Physica D. — 2012. — Vol. 241, № 22. — P. 1932-1947.

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ
ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ
НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ
С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова
e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

Развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.) Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела в сопротивляющейся среде уделялось значительное внимание. Проблема управления вращениями твердых тел при помощи сосредоточенных моментов сил, имеющая значение для приложений, менее исследована.

Аналитически и численно исследована задача синтеза квазиоптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного твердого тела в среде с линейным сопротивлением под действием малого управляющего момента с неравными коэффициентами. Управление вращениями производится с помощью момента сил ограниченного по модулю. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана). Для определения эволюции квадрата модуля эллиптических функций, безразмерных кинетической энергии и кинетического момента применяется метод усреднения. Анализ усредненной системы проводится при помощи численного интегрирования. Установлены качественные свойства квазиоптимального движения. Проведено исследование квазистационарных движений.

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Арсирий, А.Н. Терзийский

Кафедра оптимального управления и экономической
кибернетики

Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова
e-mail: a-arsiry@ukr.net

Рассмотрим управляемое дифференциальное уравнение с производной Хукухары

$$D_h X(t, u) = A(t)X(t, u) + u(t) + F(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$; $X(\cdot, u) : [0, T] \rightarrow \text{Conv}(R^n)$ - многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t, u)$ - производная Хукухары; $A(t)$ - матрица с элементами $a_{ij}(t)$ порядка $(n \times n)$; $F(\cdot) : [0, T] \rightarrow \text{Conv}(R^n)$ - многозначное отображение; $u(t) \in U \in \text{Conv}(R^n)$, $t \in [0, T]$ - управляемое воздействие.

Введем следующий критерий качества

$$I(u) = \Phi(X(T, u)), \quad (2)$$

где $\Phi(\cdot) : \text{Conv}(R^n) \rightarrow R^1$.

Предположение. Будем предполагать, что задача (1),(2) удовлетворяет условиям:

- 1) матрица $A(t)$ - измерима на $[0, T]$;
- 2) существует константа $a > 0$ такая, что

$$\|A(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t)} \leq a$$

для почти всех $t \in [0, T]$;

- 3) многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на $[0, T]$;
- 4) существует константа $f > 0$ такая, что $h(F(t), \{0\}) \leq f$ для почти всех $t \in [0, T]$;
- 5) отображение $\Phi(\cdot)$ непрерывно на $\text{Conv}(R^n)$.

Метод предполагает несколько этапов: во-первых, замену заданного множества допустимых управлений ограниченными кусочно-постоянными функциями и, во-вторых, сведение заданной задачи к задаче математического программирования.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
УСТОЙЧИВОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Ф.А. АСРОРОВ

Кафедра интегральных и дифференциальных уравнений
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
e-mail: far@ukr.net

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi, x, \varepsilon), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi, x, \varepsilon)x + f(t, \varphi, \varepsilon), \quad (1)$$

в которой де $t \in R$, $x \in R^n$, $a(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$ и $P(t, \varphi)$ непрерывные по t и удовлетворяют условию Липшица по φ соответственно векторные и матричная функции, 2π -периодические по φ_v , $v = 1, \dots, m$, ограниченные при $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m$ — m -мерный тор.

Пусть при $\varepsilon = 0$ она имеет интегральное множество

$$x = u(t, \varphi), t \in R, \varphi \in \mathcal{T}_m, u \in C(R \times \mathcal{T}_m), \quad (2)$$

лежащее в области $\|x\| \leq d$, $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Рассмотрим здесь случай, когда множество (2) является экспоненциально устойчивым. Согласно результатам [1] этот случай имеет место, когда выполняется условие $\inf_{t \in R} \inf_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \beta(t, \varphi) = \beta_0 > 0$, где $\beta(t, \varphi)$ определяется неравенством

$$\inf_{S \in R_0} \max_{\|x\|=1} \frac{\langle [S(\varphi)P(t, \varphi) + \frac{1}{2}\dot{S}(\varphi)]x, x \rangle}{\langle S(\varphi)x, x \rangle} \leq -\beta(t, \varphi),$$

где R_0 — множество $n \times n$ -мерных положительно определенных симметрических матриц, принадлежащих пространству $C'(R \times \mathcal{T}_m)$.

В докладе установлены достаточные условия существования экспоненциально устойчивого интегрального множества системы (2) при достаточно малых значениях $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

1. **Самойленко А. М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний / Самойленко А. М. — Москва : Наука, 1987. — 304 с.

S-ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ
ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.Е. БАРДИН, Н.Г. СОЛДАТОВА

Кафедра информатики, кафедра математики и физики
Московский государственный областной гуманитарный институт
e-mail: solnata@pochta.ru

Рассмотрим задачу при неопределенности с учетом рисков и сожалений [1]: $\Gamma = \langle X, Y, \{f(x, y), R_V(x), R_S(x)\} \rangle$, где $x \in X$ - стратегия ЛПР, при этом он вынужден рассчитывать на возможность реализации любой неопределенности y из множества Y .

Целевая скалярная функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на произведении $X \times Y \subseteq R^n \times R^m$. Стратегический риск $R_V(x)$ по Вальду для ЛПР положим $R_V(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) - \min_{y \in Y} f(x, y)$, стратегическое сожаление $R_S(x)$ по Сэвиджу определим как $R_S(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x, y) - \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \varphi(x, y)$, где функция сожаления $\varphi(x, y) = \max_{x \in X} f(x, y) - f(x, y)$.

Определение. Решение $x_s \in X$ в задаче Γ назовем s -оптимальным по рискам и сожалениям, если оно является максимальным по Слейтеру для двухкритериальной задачи

$$\Gamma_R = \langle X, \{f_1(x) = -R_V(x), f_2(x) = -R_S(x)\} \rangle.$$

Теорема. Пусть в задаче Γ функция $f(x, y)$ непрерывна на произведении $X \times Y$, где X и Y - компакты соответствующих евклидовых пространств. Тогда

- 1) существует s -оптимальное по рискам и сожалениям решение;
- 2) любое s -оптимальное по рискам и сожалениям решение $x_s \in X$ является максиминным (в векторном смысле) [3] решением для задачи $\Gamma_1 = \langle X, Y, \{f_1(x, y) = f(x, y), f_2(x, y) = -\varphi(x, y)\} \rangle$.

1. **Бардин А.Е.** Риски и сожаления в игре с природой /А.Е. Бардин, Ю.Н. Житенева // Int. Sci. J. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. — 2012. — Vol. 22. — P. 2-5.
2. **Bardin A.** Regret concept in non-cooperative game /Bardin A. International Year Book "Game theory and applications". — N.Y., — 1997. — 3. — P. 1-5.
3. **Zhukovskiy V.I.** The Vector-Valued Maximin /Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. — N.Y. : Academic Press, 1994.

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО
ОДНОРОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО
ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЁННЫХ
КОРНЕЙ

Т.Ю. БАРИНОВА, А.В. КОСТИН

Кафедра высшей математики

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: Tani112358@mail.ru

В работе рассматривается задача об устойчивости линейного однородного дифференциального уравнение второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (t \in I) \quad (1)$$

при условии, что комплексно-сопряжённые корни $\lambda_1(t) = \alpha - i\beta$ и $\lambda_2(t) = \alpha + i\beta$, $\alpha = \alpha(t) \in C_I^1$, $\beta = \beta(t) \in C_I^1$ соответствующего характеристического уравнения таковы, что $\alpha < 0$ ($t \in I$), $\int_{t_0}^{+\infty} \alpha dt = -\infty$, и существуют конечные или бесконечные пределы от α и β на бесконечности. Устойчивость уравнения (1) исследуется путём сведения его к эквивалентной системе, которая линейным преобразованием приводится к почти треугольному виду. Детально разобраны следующие случаи поведения корней характеристического уравнения, предполагая выполнение вышеперечисленных условий:

- 1) $\alpha(+\infty) \in \mathbb{R}_-$, $\beta(+\infty) \in \mathbb{R}$;
- 2) $\alpha = o(1)$, $\beta = o(1)$, а) $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow const$, б) $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$;
- 3) $\alpha = o(1)$, $\beta(+\infty) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 4) $\alpha(+\infty) = -\infty$, $\beta(+\infty) = \infty$, а) $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow const$, б) $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$;
- 5) $\alpha(+\infty) = -\infty$, $\beta(+\infty) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 6) $\alpha(+\infty) = -\infty$, $\beta = o(1)$;
- 7) $\alpha = o(1)$, $\beta(+\infty) = \infty$;
- 8) $\alpha(+\infty) \in \mathbb{R}_-$, $\beta(+\infty) = \infty$;

Так же во всех вышеперечисленных случаях получена оценка решений уравнения (1).

ПРО ЗАДАЧУ ВТЕЧІ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ ГРУП КЕРОВАНИХ
ОБ'ЄКТІВ

Я.Й. БІГУН, Є.А. ЛЮБАРЩУК

Кафедра прикладної математики

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

e-mail: finvara@gmail.com

Задача взаємодії груп керованих об'єктів є досить складною. Тому на перших порах досліджувалися об'єкти з простим рухом та рівними максимальними швидкостями[1]. Але найбільший інтерес викликає випадок чотирьох переслідувачів та двох втікачів[2, 3].

У роботі розглянуто задачу взаємодії групи з 4-х переслідувачів та групи з 2-х втікачів в евклідовому просторі R^2 з простим рухом і рівними динамічними можливостями

$$\dot{x}_i = u_i, i = 1..4, \|u_i\| \leq 1, x_i(0) = x_i^0, \quad (1)$$

$$\dot{y}_j = v_j, j = 1..2, \|v_j\| \leq 1, y_j(0) = y_j^0. \quad (2)$$

Керування гравців належить класу вимірних функцій. Мета групи переслідувачів – виймати усіх втікачів, для втікачів метою є – хоча б одному втекти від переслідувачів.

Умовою захвату переслідувачем втікача є виконання співвідношення: $\exists t > 0 \mid x_i(t) = y_j(t)$ для деяких i та j .

Для задачі (1), (2) доведено твердження, що при будь-яких початкових положеннях гравців хоча б один із втікачів не буде спійманим. Побудовано алгоритм керування таким втікачем. Розроблено програмний продукт, що дозволяє візуально спостерігати поведінку втікачів та переслідувачів.

1. **Пшеничний Б. М.** Простое преследование несколькими объектами / Б. М. Пшеничный // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145-146.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы / Чикрий А.А. — К. : Наук. думка, 1992. — 384 с.
3. **Прокопович П.В., Чикрий А.А.** О взаимодействии групп управляемых объектов / П.В. Прокопович, А.А. Чикрий // Теория оптимальных решений: Сб. науч. тр. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. — С. 71-75.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА

М. А. БЕЛОЗЕРОВА

Кафедра дифференциальных уравнений
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
e-mail: Marbel@ukr.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 f(t, y, y'), \quad (1)$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $f : [a, \omega[^1 \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0; +\infty[$ — непрерывная функция, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, $\Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{либо } [y_i^0; Y_i[, \\ \text{либо }]Y_i, y_i^0]^2 \end{cases} \quad (i = 0, 1).$

Кроме того, предполагается, что для любого отрезка $[c; d]$ ($0 < c \leq d < +\infty$), для любых $i, j \in \{0, 1\}$, $i \neq j$ равномерно по $\lambda \in [c, d]$, $t \in [a, \omega[$, $z_j \in \Delta_{Y_j}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{z_i \rightarrow Y_i \\ z_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{f(t, \lambda z_i, z_j)}{f(t, z_i, z_j) \lambda^{\sigma_i}} = 1, \text{ и для любой функции } L(z) \ (L : \Delta_{Y_1} \rightarrow$$

$]0; +\infty[$), медленно меняющейся при $z \rightarrow Y_1$ ($z \in \Delta_{Y_1}$) верно, что

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(t, z_0, z_1 L(z_1))}{f(t, z_0, z_1) |L(z_1)|^{\sigma_1}} = 1 \text{ равномерно по } t \in [a, \omega[, z_0 \in \Delta_{Y_0}.$$

Также предполагается, что $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\lambda_0)$ -решений уравнения (1) в неособых случаях $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$. Также установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных. В исследованиях использованы некоторые идеи из [1].

1. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений/ Евтухов В.М., Влагова Е.С.; Дифференц. уравнения. - 2012. - 48, № 5. - С. 622-639.

¹ $-\infty < a < \omega \leq +\infty$

² При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) считаем $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) соответственно.

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
УПРАВЛЕНИЯ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ
ПЕРЕМЕННЫМИ

И.А. Бойцова

Кафедра информационных технологий
Одесский государственный экологический университет
e-mail: boitsova.irina@mail.ru

Рассмотрим задачу управления системой вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon \cdot [(y_2 - y_1) \cdot x_2 + u \cdot \sin(t + x_2)], & x_1(0) &= x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon \cdot [e^{-t} y_2 x_1 + u \cdot \cos(t + x_2)], & x_2(0) &= x_2^0, \\ \dot{y}_1 &= y_2 + 1, & \dot{y}_2 &= y_1, & y_1(0) &= y_2(0) = 0, & |u(t)| &\leq 1,\end{aligned}$$

где x_1, x_2 – медленные переменные, y_1, y_2 – быстрые переменные, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, время $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

Для решения задачи воспользуемся схемой усреднения системы управления с быстрыми и медленными переменными [2].

Усреднение будем проводить вдоль решения вырожденной задачи при $\varepsilon = 0$, в результате получим усредненную задачу вида

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \varepsilon \cdot [-z_2 + v_1 \cdot \sin z_2 + v_2 \cdot \cos z_2], & z_1(0) &= x_1^0, \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon \cdot [0.5 \cdot z_1 + v_1 \cdot \cos z_2 - v_2 \cdot \sin z_2], & z_2(0) &= x_2^0.\end{aligned}$$

Для управляющих функций $v_1(t) = -\frac{1}{3} \sin \frac{t}{2}$, $v_2(t) = \cos \frac{t}{2}$ усредненной задачи построим асимптотическое управление исходной задачи в виде $\bar{u}(t) = \sin \frac{t}{2}$, при этом соответствующие траектории усредненной задачи и медленной подсистемы исходной задачи будут близки, что подтверждается проведенными расчетами и иллюстрируется на графиках.

1. **Плотников В.А.** Метод усреднения в задачах управления / Плотников В.А. – Киев-Одесса: Изд-во Лыбидь, 1992. – 188 с.
2. **Бойцова И.А.** Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными / В.А. Плотников, И.А. Бойцова // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №5. – С. 152-156.

ОПИСАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ИСКАЖЕННЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

В.В. Волчков, Вит.В. Волчков

Кафедра математического анализа и теории функций
Донецкий национальный университет
e-mail:valeriyvolchkov@gmail.com

Характеризация голоморфных функций в терминах различных интегральных условий изучалась многими авторами. В ряде работ последних лет рассматривался случай, когда контуры интегрирования в интегральном условии конгруэнтны (относительно некоторой группы) одному или нескольким фиксированным контурам. Указанный аспект теорем типа Мореры тесно связан с известной проблемой Помпейю. Авторами изучаются классы функций, удовлетворяющих условиям вида

$$\int_{|w|=r} f(z-w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z\bar{w})}dw=0, \quad (1)$$

где r является фиксированным числом или принадлежит заданному двухэлементному множеству. Интерес к уравнению (1) обусловлен тем, что оно тесно связано с CR -функциями на группе Гейзенберга H^n , которая широко используется в различных областях математики. Принципиальное отличие данной работы состоит в том, что уравнение (1) изучается здесь локально, а именно для функций, заданных в открытом круге на комплексной плоскости. В этом случае получено полное описание функций с условием (1) в виде ряда по специальным функциям. Метод доказательства этого результата основан на теории трансмутационных операторов на фазовом пространстве группы Гейзенберга, развитой авторами в [1].

1. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.

Функции Феррерса $T_\nu^\mu(x)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $x \in (-1, 1)$) определяются равенством

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{e^{i\pi\mu}}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right),$$

где F - гипергеометрическая функция Гаусса (см.[1]).

В работе исследуются асимптотические свойства $T_\nu^\mu(x)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Получено разложение для $T_\nu^\mu(x)$, аналогичное асимптотическому ряду Бесселя.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in (0, \pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}}{k+1} \operatorname{ctgr}, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно, } k \neq 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

$$A_0 = (\sin r)^{\alpha - \frac{1}{2}},$$

$$A_p = (\sin r)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sum_{m=1}^p \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)_m}{m!} \sum_{k_1 + \dots + k_m = p} \frac{p! d_{k_1}(r) \dots d_{k_m}(r)}{k_1! \dots k_m!},$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера.

Теорема. Пусть $\varepsilon \in (0, \pi)$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение

$$T_{\lambda - \frac{1}{2}}^\mu(\cos r) \sim \frac{2e^{i\pi\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)(\sin r)^{-\mu}} \times$$

$$\left(\cos \left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu) \right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu - \mu + \frac{1}{2})}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu - \mu + \frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1 - 2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu - \mu + \frac{3}{2})}{(2\nu + 1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu - \mu + \frac{3}{2}}} \Bigg).$$

Относительно различных частных случаев теоремы 1 см. [1] - [4].

1. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: ИЛ, 1952. — 476 с.
2. **Volchkov V.V.** Integral geometry and convolution equations. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ., 2003. — 454 p.
3. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. — London: Springer., 2009. — 671 p.
4. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. — Basel: Birkhäuser., 2013. — 592 p.

НЕЛОКАЛЬНІ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ
ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

З ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ УМОВАМИ

В.В. ГОРОДЕЦЬКИЙ, О.В. МАРТИНЮК

Кафедра алгебри та інформатики

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

e-mail: alfaolga@rambler.ru

Багато прикладних задач моделюються крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерних реакцій, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження, тощо). Такі задачі виникають також при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач. Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалися багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (О. О. Дезін, В. К. Романко, С. Г. Крейн, В. М. Борок, Б. Й. Пташник, В. І. Чесалін, О. А. Самарський та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У той же час нелокальні багатоточкові (за t) задачі для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами, які в крайовій умові також містять псевдодиференціальні оператори, побудовані за різними однорідними негладкими у точці 0 символами, на теперішній час не вивчалися. Вказані задачі мають природну постановку і в різних класах узагальнених функцій, оскільки граничні функції можуть мати особливості в одній або декількох точках і допускати регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків. У роботі встановлено розв'язність такої m -точкової ($m \geq 1$) за часом задачі, знайдено клас узагальнених граничних функцій, для яких розв'язок задачі зображається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Н.Н. Драгуновский, С.К. Асланов, А.П. Царенко

Кафедра теоретической механики

Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова

e-mail:dragunovsky@gmail.com

Существует класс течений, для которых неизвестен общепринятый механизм линейной неустойчивости. К таким течениям можно отнести, прежде всего, плоское сдвиговое течение Куэтта и напорное течение Хагена-Пуазейля в трубе круглого сечения. С другой стороны, из экспериментов известно, что для потока в круглой трубе турбулентность может возникнуть при числах Рейнольдса, близких всего лишь к 2000.

Известны "искажения" классических профилей, которые наблюдаются в эксперименте при определенных условиях теплообмена с внешней средой и которые проявляются в появлении точек перегиба профиля скорости с одновременным его вытягиванием по направлению течения.

Основным допущением при классическом моделировании указанных движений является неизменность теплофизических характеристик жидкости, поэтому приблизиться к решению данной проблемы можно с позиций жидкости переменной вязкости. В этом случае динамика течения и термодинамическое состояние жидкости, формируемое вязкой диссипацией и условиями теплообмена с внешней средой, будут наиболее полно отражать реальную внутреннюю структуру потока жидкости.

Целью настоящей работы является обобщение исследований по проблеме границ существования для стационарного сдвигового течения жидкости переменной вязкости с учетом произвольных условий теплообмена с внешней средой и построение единой методики расчета всех параметров движения в докритических условиях и на "пределе".

Для произвольных условий теплообмена с внешней средой и различных кинетик математическая задача становится не разрешимой в конечном виде. Поэтому естественным остается прибегнуть к численно-аналитическим методам с реализацией на ЭВМ.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Я.М. ДРІНЬ

Кафедра вищої математики

Буковинський державний фінансово-економічний університет

e-mail: drin_jaroslav@i.ua

У працях [1, 2, 3] проведено дослідження задачі Коші для рівнянь типу фрактальної дифузії, які містять регуляризовану дробову похідну Рімана-Ліувілья за часовою змінною та похідні до другого порядку за просторовими змінними. Рядом авторів досліджувалася також задача типу Коші для звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана-Ліувілья (див. [4]). Детальний огляд праць, у яких досліджувалися нелокальні крайові задачі наведено в монографії Б.Й. Пташника [5]. Двоточкова за часом задача для рівняння дифузії з оператором D_t^α , $\alpha \in (0, 1)$ досліджена в [6]. Нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних рівнянь з оператором дробового диференціювання за часовою змінною та оператором диференціювання довільного порядку на теперішній час не вивчалися.

Нелокальна багатоточкова за часом задача. Розглядається еволюційне рівняння

$$D_t^\alpha u(t, x) = P(D)u(t, x), (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де $D \equiv id/dx$, $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову $\exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}$,

$$D_t^\alpha u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\tau, x)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\alpha = p/q$, p, q – непарні натуральні числа.

Для рівняння (1) задамо нелокальну за часом багатоточкову умову

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \dots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = f, \quad (2)$$

де $f \in L_1(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \mu_1 + \dots + \mu_m$.

Метою даної праці є побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку (ФР) вказаної задачі, встановлення розв'язності задачі у випадку, коли гранична функція – узагальнена функція типу ультрарозподілів. Постановка багатоточкової задачі у різних класах узагальнених функцій є природною, оскільки до ультрарозподілів відноситься і регуляризації функцій, що мають в одній або декількох точках особливості, порядок яких вищий за степеневий [7].

Знайдено клас X' узагальнених граничних функцій, для яких розв'язок задачі (1), (2) є згорткою функцій f з ФР (який є елементом простору X основних функцій). Розв'язок $u(t, \cdot) \in X$ при кожному $t \in (0, T]$, а гранична умова (2) задовольняється в просторі X' .

1. **Кочубей А.Н.** Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 8. — С. 1359–1368.
2. **Кочубей А.Н.** Диффузия дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 4. — С. 485–492.
3. **Кочубей А.Н.** Уравнения одномерной фрактальной диффузии / А.Н. Кочубей, С.Д. Эйдельман // Доповіді НАН України. — 2003. — № 12. — С. 11–16.
4. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. **Нелокальні** крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. — К.:Наук. думка, 2002. — 416 с.
6. **Матійчук М.І.** Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні / Матійчук М.І. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. — 248 с.
7. **Горбачук В.И.** Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / Горбачук В.И., Горбачук М.Л. — К.: Наук. думка, 1984. — 283 с.

УРАВНОВЕШИВАНИЕ КОНФЛИКТОВ:
ГАРАНТИРОВАННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

В.И. Жуковский

Кафедра оптимального управления
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Рассматривается математическая модель конфликта в виде бескоалиционной игры N лиц при неопределенности:

$$\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in N} \rangle,$$

здесь $N = \{1, \dots, N\}$ - множество порядковых номеров игроков, $X_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ - множество стратегий x_i у i -го игрока, $X = \prod_{i \in N} X_i$ - множество ситуаций $x = (x_1, \dots, x_N)$ игры Γ , используем также ситуацию $(x^e || x_i) = (x_1^e, \dots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \dots, x_N^e)$, $Y \subset \mathbf{R}^m$ - множество неопределенных факторов y , Y^X - множество неопределенностей вида $y(\cdot) : X \rightarrow Y$, $f_i(x, y)$ - функции выигрыша i -го игрока, N -вектор $f = (f_1, \dots, f_N)$, каждый i -ый игрок стремится так выбрать свою ситуацию $x_i \in X$, чтобы при любой неопределенности $y(\cdot) \in Y^X$ его выигрыш - значение скалярной функции $f_i(x, y(x))$ - принимал бы возможно большее значение.

Определение 1. Пару $(\bar{x}^e, f^S) \in X \times \mathbf{R}^N$ назовем сильно гарантированным равновесием игры Γ , если для каждого $i \in N$ найдутся $y^{(i)}(\cdot) \in Y^X$ такие, что, во-первых,

$$\min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \quad \forall x \in X, \quad (1)$$

во-вторых, существуют $x^e \in X$, при которых

$$\max f_i[x^e || x_i] = f_i[x^e] \quad (i \in N)$$

(множество таких x^e обозначим X^e),

во-вторых, для любых $x \in X^e$ несовместна система строгих неравенств $(f^S = (f_1^S, \dots, f_N^S))$:

$$f_i[x] > f_i[\bar{x}^e] = f_i^S \quad (i \in N).$$

Пусть теперь каждый i -ый игрок может использовать и смешанные стратегии $\mu_i(dx_i)$ - вероятностные меры, то есть скалярные неотрицательные функции $\mu_i(\cdot)$, определенные на борелевской σ -алгебре подмножеств компакта X_i и нормированные единицей; множество смешанных стратегий $\mu_i(\cdot)$ обозначаем $\{\mu_i\}$, будем рассматривать и ситуации $\mu(dx) = \mu_1(dx_1) \dots \mu_N(dx_N)$, их множество $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$, меру $(\mu^e || \mu) = (\mu_1^e, \dots, \mu_{i-1}^e, \mu_i, \mu_{i+1}^e, \dots, \mu_N^e)$, а также квазисмешанное расширение функций выигрыша i -го игрока

$$f_i(\mu, y) = \int_X f_i(x, y) \mu(dx) \quad (i \in \mathbf{N}).$$

Определение 2. Пару $(\bar{\mu}^e, \tilde{f}^S) \in \{\mu\} \times \mathbf{R}^N$ назовем сильно гарантированным равновесием игры Γ в смешанных стратегиях, если,

во-первых, найдутся $y^{(i)}(\cdot) \in Y^X$ ($i \in \mathbf{N}$), для которых имеет место (1),

во-вторых, существуют $\mu^e(\cdot) \in \{\mu\}$, при которых

$$\begin{aligned} (f_i[x] = f_i(x, y^{(i)}(x)), f_i[\mu] = \int_X f_i[x] \mu(dx), \\ f_i[\mu^e || \mu_i] \leq f_i[\mu^e] \quad \forall \mu_i(\cdot) \in \{\mu_i\}, \quad i \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2)$$

(множество таких $\mu^e(\cdot)$ обозначим $\{\mu^e\}$),

в-третьих, несовместна система строгих неравенств

$$f_i[\mu] > f_i[\bar{\mu}^e] = \tilde{f}_i^S \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\mu^e\}, \quad i \in \mathbf{N};$$

$\mathbf{N}$ -вектор $f^S = (f_1^S, \dots, f_N^S)$.

Теорема. Если в игре Γ множества X_i ($i \in \mathbf{N}$), Y суть компакты, Y - выпукло, функции $f_i(x, y)$ непрерывны и строго выпуклы по y при каждом $x \in X$, то для Γ существует сильно гарантированное равновесие в смешанных стратегиях.

Доказательство основывается на трех фактах: существование $y^{(i)}(x)$ из (1), что следует из компактности X_i ($i \in \mathbf{N}$) и Y , выпуклости Y и строгой выпуклости $f_i(x, y)$ по y , теоремы Гликсберга о существовании μ^e из (2) и, наконец, слабой компактности в себе множества $\{\mu^e\}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ
МОНОЦИКЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ
КЛЕТОК

Ю.В. Загородний

Кафедра системного анализа и теории принятия решений
Киевский Национальный университет имени Тараса Шевченко
e-mail: yuzagor@ukr.net

Моделирование жизненного цикла моноциклической системы биологических клеток описывает процессы их переноса по параметру биологического возраста через стадии рождения, деления, старения и смерти на основе уравнений гиперболического типа [1]. В моноциклической модели клетки делятся на две группы. Первая группа представляет множество клеток возраста $\tau \in [0, \tau_d]$, где $0 \leq \tau_d \leq \tau_{max}$. В возрасте τ_d клетки первой группы могут делиться на μ дочерних клеток ($\mu \in N, \mu \geq 2$), которые имеют возраст $\tau = 0$. Вторая группа представляет собой клетки возраста $\tau \in [\tau_d, \tau_{max}]$, которые теряют способность к делению и «доживают» до максимального возраста агрегации $\tau = \tau_{max}$. Получено аналитическое решение системы уравнений переноса и исследованы свойства гладкости для заданного класса входных параметров модели, что позволяет имитировать различные сценарии развития биологических клеток, соответствующие различным природным условиям. Рассмотрены задачи оптимального управления для критериев, определяющих необходимость достигать и сохранять максимально возможное приближение функции плотности распределения клеток первой группы $h_0(\tau, t)$ к желательному распределению $\varphi_s(\tau)$ на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$, где $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ заданы в задаче. Также разработан алгоритм параметрической идентификации модели по данным исследований роста биологических организмов как системы клеток. Рассмотренные задачи могут использоваться для анализа различных сценариев развития биологических систем.

1. **Акименко В.В., Загородний Ю.В.** Моделирование динамики системы моноциклической агрегации клеток // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1 — С 34-50

МНОГОТОЧЕЧНАЯ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НАВЬЕ – СТОКСА

С.А. ЗАГРЕБИНА

Кафедра уравнений математической физики
Южно-Уральский государственный университет (национальный
исследовательский университет)
e-mail: zagrebina_sophiya@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}_+$ рассмотрим задачу Дирихле

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+ \quad (1)$$

для системы уравнений Навье – Стокса

$$v_t = \nu \nabla^2 v - p, \quad \nabla(\nabla \cdot v) = 0, \quad (2)$$

которая моделирует в линейном приближении динамику вязкой несжимаемой жидкости.

Для системы уравнений (1) с условием (2) рассмотрим много-точечную начально-конечную задачу [1]

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle v(\tau_j), \varphi_k \rangle \varphi_k = v_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3)$$

причем $-\infty \leq a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < b \leq +\infty$, $v_j \in \mathcal{U} \equiv \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_\pi$, $j = \overline{0, n}$. Здесь μ_k – точки относительного спектра $\sigma^L(M)$ [2].

Теорема 1. *При любых $\nu \in \mathbf{R}_+$, $v_j \in \mathcal{U}$, $j = \overline{0, n}$, существует единственное решение задачи (1) – (3).*

1. **Загребина С. А.** Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / Загребина С. А. // Вестник ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование". – Челябинск, 2013. – Т. 6, №2. – С. 5–24.
2. **Sviridyuk G.A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.А. ЗАМЫШЛЯЕВА

Кафедра уравнений математической физики
Южно-Уральский государственный университет (национальный
исследовательский университет)
e-mail: alzama@mail.ru

Теория уравнений соболевского типа переживает эпоху своего расцвета. Большое число исследований посвящено детерминированным уравнениям и системам. Однако в натурных экспериментах возникают математические модели, содержащие случайные возмущения, например, в виде белого шума. Поэтому в последнее время все чаще появляются исследования, посвященные стохастическим дифференциальным уравнениям. В данной работе в рамках теории уравнений соболевского типа [1] рассмотрена математическая модель Буссинеска – Лява с аддитивным белым шумом. При изучении модели полезными оказались методы и результаты теории уравнений соболевского типа с относительно p -ограниченными операторами. Поскольку модель представлена вырожденным уравнением математической физики, то к ней трудно применимы существующие ныне подходы Ито – Стратоновича – Скорохода [2]. Мы используем уже хорошо зарекомендовавший себя при решении уравнений соболевского типа метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. В докладе приводятся основные факты теории относительно p -ограниченных операторов [1], достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка. Абстрактные результаты применяются к исследованию математической модели Буссинеска – Лява.

1. **Sviridyuk G.A.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. **Da Prado J.** Stochastic Equations in Infinite Dimensions / Da Prado J. – Cambridge University Press, 2008.

О НЕКОТОРЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМАХ
 ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Е. ЗЕРНОВ, И.В. КЕЛЮХ

Кафедра алгебры и геометрии

Южноукраинский национальный педагогический университет

имени К.Д. Ушинского

e-mail: user85085@mail.ru

Рассматриваются задачи Коши

$$\begin{cases} \alpha_1(t) x_1'(t) = f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x_2(t) = f_2(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} \alpha_1(t) x_1'(t) = f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ \alpha_2(t) x_2'(t) = f_2(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^k$ - неизвестная функция, $x = \text{col}(x_1, x_2)$,
 $\alpha_i : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ - непрерывные функции, $i \in \{1, 2\}$,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \alpha_i(t) = 0, i \in \{1, 2\}, \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)} = 0,$$

$f_i : D \subset \mathbb{R}$ - непрерывные функции, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$,
 $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$, $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ - непрерывные функции,
 $g(t) \leq t, h(t) \leq t, t \in (0, \tau)$.

Доказано существование у каждой из задач (1), (2) непрерывно дифференцируемых решений $x : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\rho \leq \tau$ - достаточно мало) и исследовано асимптотическое поведение этих решений при $t \rightarrow +0$.

АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ
ЗАДАЧ КОШІ

О.Є. ЗЕРНОВ ¹, Ю.В. КУЗІНА ²

¹ Кафедра алгебри та геометрії

¹ Південноукраїнський національний педагогічний університет
ім. К.Д.Ушинського

² Кафедра природничо-наукових (фундаментальних) дисциплін

² Одеська військова академія

e-mail:yuliak@te.net.ua

Розглядається задача Коші

$$\alpha(t)x'(t) = a_1t + a_2x(t) + b_1t^2 + b_2tx(t) + b_3tx'(t) + b_4x(t)x'(t) + \\ + b_5x(t)^2 + \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0,$$

де $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ - невідома функція. a_i, b_j - сталі, $i \in \overline{1, 2}, j \in \overline{1, 5}$,
 $\alpha : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ - неперервна функція, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0$ $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ - неперервна функція, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Розв'язком даної задачі назвемо неперервно диференційовну функцію $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < \rho < \tau$), яка тотожно задовольняє диференціальне рівняння при всіх $t \in (0, \rho]$ та, крім того, задовольняє умову $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0$.

Вивчаються три можливі випадки:

$$1) \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^2}{\alpha(t)} = 0, \quad 2) \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\alpha(t)}{t^2} = c, c \in (0, +\infty), \quad 3) \lim_{t \rightarrow +0} t \frac{\alpha(t)}{t^2} = 0.$$

Відповідно до кожного можливого випадка наведені достатні умови, при виконанні яких у задачі, що розглядається існують неперервно диференційовні розв'язки $x : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що

$$1) \quad x(t) = c_1t + c_2\alpha(t) + o(\alpha(t)), \quad t \rightarrow +0;$$

$$2) \quad x(t) = c_1t + c_2t^2 + o(t^3), \quad t \rightarrow +0;$$

$$3) \quad x(t) = c_1t + c_2t^2 + o(t^3), \quad t \rightarrow +0;$$

де c_1, c_2 - знайдені сталі. Також вивчається питання про кількість таких розв'язків.

В дослідженнях використовуються методи якісної теорії диференціальних рівнянь.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ
РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Калинин

Кафедра методов оптимального управления
Белорусский государственный университет
e-mail: kalininai@bsu.by

В докладе излагается подход к исследованию задач оптимизации динамических систем, содержащих малые параметры, в основу которого положена идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Суть этого подхода состоит в следующем. Для многих задач оптимального управления можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов можно составить систему конечных уравнений. Формируются эти уравнения путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах – классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных – метод пограничных функций), можно разложить функции, формирующие конечные уравнения, по степеням малого параметра, а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику определяющих элементов. Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложений определяющих элементов. В докладе показывается, что этими коэффициентами являются определяющие элементы невозмущенных задач оптимального управления, более простых, чем исходные задачи.

РОЗПОДІЛЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ
НЕСАМОСПРЯЖЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

В.О. КАПУСТЯН¹, О.А. КАПУСТЯН², О.К. МАЗУР³

¹Кафедра математичного моделювання економічних систем,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

karustyanv@ukr.net

² Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
olena.kap@gmail.com

³ Кафедра вищої математики

Київський національний університет харчових технологій
okmazur@ukr.net

В круговому секторі $Q = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$ розглядається задача оптимального керування для рівняння Пуассона з нелокальними крайовими умовами

$$\begin{cases} \Delta y := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(r, \theta), & (r, \theta) \in Q, \\ y(1, \theta) = p(\theta), & p(0) = 0, \\ y(r, 0) = 0, & r \in (0, 1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \pi), & r \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

$$J(y, u) = \|y(\alpha)\|_D^2 + \int_0^1 \|u^2(r)\| dr \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де $p \in C^1([0, \pi])$ – задана функція, $\alpha \in (0, 1)$ – фіксоване, $\|\cdot\|_D$ – норма в $L^2(0, \pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \right)^{1/2},$$

де $\forall n \geq 1, v_n = \int_0^{\pi} v(\theta) \psi_n(\theta) d\theta, \psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2}, \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta) \sin 2n\theta, \psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta$.

У роботі доводиться класична розв'язність задачі (1)-(2), тобто знаходиться оптимальний серед допустимих процесів $\{u, y\} \in C(Q) \times (C(Q) \cap C^2(Q))$.

РЕКУРЕНТНІ ВЛАСТИВОСТІ ω -ГРАНИЧНИХ МНОЖИН
ТРАЄКТОРІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

О.В. КАПУСТЯН, О.А. ПАНЬКОВ

Кафедра інтегральних і диференціальних рівнянь
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua, andriy.pankov@gmail.com

Однією з найважливіших задач в теорії динамічних систем є вивчення поведінки траєкторій на інваріантних множинах. Однією з характеристик цієї поведінки є ланцюгова рекурентність, яка в даній роботі встановлена для ω -граничних множин траєкторій диференціальних включень виду

$$y' \in F(y), \quad (1)$$

з компактнозначною, опуклозначною, локально-ліпшицевою многозначною правою частиною $F : R^p \mapsto 2^{R^p}$.

Означення. Множина $A \subset R^p$ називається ланцюгово - рекурентною, якщо для довільних $x \in A, \varepsilon > 0, t > 0$ існують послідовності $\{x = x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = x\}, \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, x_i \in A, t_i \geq t$ такі, що $\rho(x_{i+1}, G(t_i, x_i)) < \varepsilon, i = 1, n$, де G -м-напівпотік, породжений розв'язками (1).

Теорема 1. Якщо кожна траєкторія φ включення (1) є стійкою за Лагранжем, то $\omega(\varphi)$ - ланцюгово-рекурентна.

Наступний результат частково обертає твердження теореми 1.

Теорема 2. Нехай $A \subset R^p$ - компактна, зв'язна, ланцюгово рекурентна, напівінваріантна відносно м-напівпотіку G , породженого розв'язками (1) і $\exists R_0 > 0 \forall t \geq 0 G(t, A) \subset B_{R_0}$. Тоді $\forall y_0 \in A \forall \varepsilon > 0 \exists y_c(\cdot) = y_c(\cdot, y_0)$ - розв'язок включення

$$y' \in B_\varepsilon(F(y))$$

такий, що $A \subset \omega(y_c)$. Якщо ж A - інваріантна, то $A = \omega(y_c)$.

1. **Капустян О.В.** Про рекурентні властивості ω -граничних множин многозначних напівпотіків / О.В. Капустян, А.В. Паньков // Вісник Київського університету. Серія: Математика, механіка. — 2010. — Вип.23. — С. 16-18.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С
НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И
ПОЛУОПРЕДЕЛЁННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В.Е. КАПУСТЯН, И.А. ПЫШНОГРАЕВ

Кафедра ММЭС ФММ

Национальный технический университет Украины

”Киевский политехнический институт“

e-mail: v.kapustyan@mses.kpi.ua, pyshnograiev@gmail.com

В докладе рассматривается задача оптимального управления для парабола-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями [1]. Требуется найти управления $v^*(t) \in C[-\alpha, 0] : |v^*(t)| \leq 1; |u^*(0)| \leq l_0; \xi^*(t) \in L_2[0, T] : |\xi^*(t)| \leq l_1$ п. в. на $[0, T]$, которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u}) = 0.5 \left(\left(\int_0^1 q(x) (y(x, T) - \psi(x)) dx \right)^2 + \right. \\ \left. + \gamma \left(\int_{-\alpha}^0 v^2(t) dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t) dt \right) \right),$$

где $\psi(x), q(x)$ - фиксированные функции, $\gamma, l_0, l_1 = \text{const} > 0$,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \xi(\tau) d\tau.$$

Для поставленной задачи найдены приближенные оптимальные управления, доказана их сходимость к точному решению, представленному в виде бесконечных рядов. Приведены расчёты некоторых примеров для иллюстрации найденных решений.

1. Капустян В. О., Пишнограєв І.О. Умови існування і єдиності розв'язку парабола-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУУ „КПІ“. — 2012. — №4. — С. 72-86.

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННОЙ МАТРИЦЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

А.В. КЕЛЛЕР

Кафедра математического моделирования
Южно-Уральский государственный университет (Национальный
исследовательский университет), Челябинск
e-mail:alevtinak@inbox.ru

Пусть L и M – матрицы $n \times n$, $\det L = 0$, $M - (L, p)$ -регулярна ($\exists \lambda \in \mathbf{C} : \det(\lambda L - M) = 0$, $\exists p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в противном случае), $\tau \in \mathbf{R}_+$.

В докладе представлены: 1) постановка задачи оптимального управления $J(v) = \min_{u \in H_\theta^{p+1}} J(u)$, с начальным условием Шоуолтера–Сидорова $[(\lambda L - M)^{-1} L]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0$, для системы леонтьевского типа с переменной матрицей управления $B(t)$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) + B(t)u(t),$$

где функционал качества имеет вид

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \gamma_q \int_0^\tau \|z^{(q)}(t) - z_0^{(q)}\|^2 dt + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt,$$

здесь α и β – весовые коэффициенты целей качества управления, $\alpha + \beta = 1$, γ_q – адаптивные коэффициенты численного алгоритма, $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$;

2) алгоритм численного решения этой задачи с использованием подхода, изложенного в [1];

3) смысл элементов матрицы $B(t)$ в экономических приложениях исследуемой задачи.

1. **Келлер А.В.** Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / Алевтина Келлер // Программные продукты и системы. — 2011. — № 3. — С. 42.

ПРО ОДНУ СИСТЕМУ БАГАТОМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ З КУСКОВО-СТАЛИМИ
КОЕФІЦІЄНТАМИ

Д.П. КЕРЕКЕША

Кафедра вищої математики

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

Розглядається система багатомірних інтегральних рівнянь типу згортки з кусково-сталими коефіцієнтами.

Вона має такий вигляд:

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^s \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} P_{E_j} \int_{\mathbb{R}^m} k_j(x-t) \varphi(t) dt = f(x), x \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

де $\mathbb{R}^m = E = \bigcup_{j=1}^s E_j$, $E_j \cap E_k = \emptyset (i \neq k)$, $E_j, i = \overline{1, s}$ — ви-

мірні за Лебегом множини, $mes E_k > 0$, $k = \overline{1, s}$; задані матриці $k_j(x)$, $j = \overline{1, s}$ належать простору $L_1^{n,n}(\mathbb{R}^m)$, а вектор-функція $f(x)$ відповідно належить $L_2^n(\mathbb{R}^m)$, P_E — оператор множення на характеристичну функцію множини E . Невідома функція $\varphi(x)$ шукається в просторі $L_2^n(\mathbb{R}^m)$. Система (1) є узагальненням рівняння розглянутої в монографії [1].

Нехай виконані також наступні умови:

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \max_{1 \leq j \leq s} \|k_j(x)\|_{L_1^{n,n}(\mathbb{R}^m)} < 1 \quad (2)$$

$$\det |I + K_j(x)| \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad j = \overline{1, s} \quad (3)$$

де $K_j(x)$ — перетворення Фур'є матриці $k_j(x)$.

За умов (2)-(3) система багатомірних інтегральних рівнянь (1) має єдиний розв'язок, який побудовано у квадратурах.

1. **Черский Ю.И.** Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса : Астропринт, 2010. — 552 с.

ОБОСНОВАНИЕ СХЕМЫ ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ С
ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Д. КИЧМАРЕНКО, М.Л. КАРПЫЧЕВА

Кафедра оптимального управления и экономической
кибернетики

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com

m.karplycheva@gmail.com

Рассмотрим дискретные уравнения управляемого движения, содержащие переменное запаздывание, вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot [f(i, x_i, x_s) + A(x_i, x_s) \varphi(i, u_i)], \quad x_0 = x^0,$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – текущее состояние системы, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f(i, x_i, x_s)$, $\varphi(i, u_i)$ – заданные вектор-функции, $A(x_i, x_s)$ – заданная $n \times m$ -матрица, $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = \text{const}$, $E(a)$ – целая часть числа a , $s \in I_s = \{0, 1, 2, \dots, i\}$ определяет момент влияния переменного запаздывания на текущее состояние системы, $u_i \in U \subset \text{comp}(R^r)$ – вектор управления.

Пусть равномерно относительно q и $\xi^1, \xi^2 \in D$ существуют

$$f_0(\xi^1, \xi^2) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f(j, \xi^1, \xi^2),$$

$$V = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} \varphi(j, U),$$

где целочисленное значение $h(\varepsilon)$ обладает свойствами

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot h(\varepsilon) = 0.$$

Исходной системе уравнений поставим в соответствие усредненную систему

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon h \cdot [f_0(\xi_k, \xi_m) + A(\xi_k, \xi_m) \cdot v_k],$$

$$\xi_0 = x^0, \quad s \in [mh, (m+1)h],$$

$$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i - kh)(\xi_{k+1} - \xi_k)}{h}, \quad i \in [kh, (k+1)h),$$

где $k \in I_k = \{0, 1, \dots, N_k\}$, $N_k = E\left(\frac{L}{h\varepsilon}\right)$, $m \in I_m = \{0, 1, \dots, k\}$.

Сформулированы условия, при которых для любого допустимого управления $v = v_k \in V$, $k \in I_k$ усредненной задачи можно построить допустимое управление $u = \bar{u}_i \in U$, $i \in I$ исходной задачи по формулам

$$\left\| v_k - \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varphi(j, \bar{u}_j) \right\| = \min_{u_j \in U} \left\| v_k - \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varphi(j, u_j) \right\|,$$

обеспечивающее близость решений исходной и усредненной задач на асимптотически большом промежутке времени.

1. **Плотников В.А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / В.А. Плотников, Л.И. Плотникова, А.Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т.7, № 2. – С. 241 – 254.
2. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием / О.Д. Кичмаренко, М.Л. Карпычева // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 76 – 85.
3. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени / О.Д. Кичмаренко, М.Л. Карпычева // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. – 2012. – Т.17, вып. 1–2. – С. 54 – 69.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С
ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

О.Д. Кичмаренко, А.А. Плотников

Кафедра оптимального управления и экономической
кибернетики

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com, olean@ukr.net

В докладе рассматриваются дифференциальные включения с переменной размерностью, к которым сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания, а так же импульсные дифференциальные включения.

Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, N - множество натуральных чисел, а $N_0 = N \cup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \rightarrow N$, которые удовлетворяют следующим условиям

- 1) $n(\cdot)$ - кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;
- 2) если $n((t+0)-n(t)) \neq 0$, то $n(\tau)-n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t, t+\theta]$.

Обозначим через M_n множество матричных функций, соответствующих функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ таких, что

- 1) $M(t)$ - матрица $(n(t-0) \times n(t))$;
- 2) $M(t) = \begin{cases} E, & n(t) - n(t-0) = 0 \\ M(t), & n(t) - n(t-0) \neq 0 \end{cases}$ и $M(0) = E$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ и $M(\cdot) \in M_n$.

Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью

$$\dot{x}(t, n, M) \in F(t, x(t, n, M), n), \quad x(0, n(0), M(0)) = x_0, \quad (1)$$

где $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $M(\cdot) \in M_n$; $x(t, n, M)$ - фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \rightarrow \text{comp}(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Очевидно, что если $n(t) \equiv n$, то система (1) будет обычным дифференциальным включением.

В докладе приводятся условия существования обычного решения включения (1) и компактности сечения множества решений.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

А. А. КОЗЬМА

Кафедра математических методов анализа экономики
Одесский национальный экономический университет
e-mail: sanjakos@ukr.net

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i(t) [1 + r_i(t)] \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'), \quad (1)$$

в котором при $i = 1, \dots, m$: $\alpha_i \in \{-1; 1\}$, $p_i : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a, \omega) \rightarrow R$ – непрерывные функции, исчезающие в ω , $\varphi_{ik} : \Delta_k \rightarrow (0, +\infty)$ ($k = 0, 1$; Δ_k – односторонняя окрестность Y_k , Y_k – либо ноль, либо бесконечность) – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0 \quad (0 \leq \varphi_{ik}^0 \leq +\infty), \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z \varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = const.$$

В [1] достаточно подробно исследован вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (1) в случае, когда при $t \uparrow \omega$ и само решение, и его производная стремятся либо к нулю, либо к бесконечности.

Целью данной работы является установление асимптотического поведения решений уравнения (1), которые имеют отличный от нуля конечный предел при $t \uparrow \omega$, и решений, производная которых имеет отличный от нуля конечный предел при $t \uparrow \omega$.

1. **Козьма А. А.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Козьма Александр Александрович. – Одесса, 2012.

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ
ДВУХИНДЕКСНОЙ СИСТЕМЫ ВИНЕРА—ХОПФА

Л.Н. КОЛМАКОВА, А.Л. КОМАРНИЦКИЙ

Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский национальный политехнический университет
e-mail: lyukol@mail.ru

Пусть $\nu > 0$ – иррациональное число, $k = \{k_{n,m}\} \in l_1(Z^2)$, $h = \{h_{n,m}\} \in l_2(Z^2)$. Рассмотрим бесконечную двухиндексную алгебраическую систему Винера-Хопфа:

$$\sum_{\nu j+l \geq 0} k_{n-j, m-l} \varphi_{j,l} = h_{n,m}, \quad \nu n + m \geq 0.$$

Неизвестную последовательность $\varphi = \{\varphi_{n,m}\}$ ищем в классе $l_2(Z^2)$. Интересуют те ее члены, номера которых удовлетворяют неравенству $\nu n + m \geq 0$. Вводятся две неизвестные последовательности $\varphi_{\pm} = \{\varphi_{n,m}^{\pm}\} \in l_2(Z^2)$, причем $\varphi_{n,m}^+ = 0$ при $\nu n + m < 0$ и $\varphi_{n,m}^- = 0$ при $\nu n + m \geq 0$. Заданная система рассматривается на множестве Z^2 , а для компенсации ее на множестве, где $\nu n + m < 0$, к правой части добавим φ^- . Получим систему

$$\sum_{j,l \in Z} k_{n-j, m-l} \varphi_{j,l}^+ = h_{n,m} + \varphi_{n,m}^-.$$

Переход к изображениям Фурье приводит систему к двухэлементной периодической задаче Римана

$$K(x, \xi) \Phi^+(x, \xi) = H(x, \xi) + \Phi^-(x, \xi),$$

которая при $K(x, \xi) \neq 0$ приводится к стандартному виду

$$\Phi^+(x, \xi) = A(x, \xi) \Phi^-(x, \xi) + G(x, \xi),$$

где $A(x, \xi) = (K(x, \xi))^{-1}$, $G(x, \xi) = H(x, \xi) (K(x, \xi))^{-1}$.

Для определения общего решения используется метод факторизации. Разрешимость задачи зависит от частичных индексов κ_1 и κ_2 функции $A(x, \xi)$. В случае ненулевых частичных индексов общее решение может зависеть от конечного числа произвольных одноиндексных последовательностей. В случае отрицательных частичных индексов разрешимость задачи зависит от бесконечного числа условий разрешимости.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ
КОШИ ПРИ $t \rightarrow +\infty$ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Л. Кольцова, А.В. Костин

Кафедра высшей математики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: koltsova.liliya@gmail.com, kostin_a@ukr.net

Продолжены исследования достаточных условий существования o -решений при $t \rightarrow +\infty$ и изучение размерности множества таких решений вещественной системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_1(t)f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = \alpha_2(t)f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \quad (t, y_1, y_2) \in G, \quad (1)$$

где $G = \{t \in \Delta = [t_0, +\infty), t_0 > 0; |y_i| \leq b, b \in \mathbf{R}_+ (i = 1, 2)\}$;
 $0 < \alpha_i(t) \in C(\Delta), \int_{t_0}^{+\infty} \alpha_i(t) dt = +\infty (i = 1, 2); \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} = \mu,$
 $\mu \in \{0, 1\}; f_i \in C_{ty_1 y_2}^{1, 2, 2}(G), f_i(+\infty, 0, 0) = 0; \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(+\infty, 0, 0) \in \mathbf{R}$
 $(i, j = 1, 2); \lambda_i(t) (i = 1, 2) - \text{корни характеристического уравне-}$
 ния

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_2} - \lambda \end{vmatrix} \bigg|_{(t, 0, 0)} = 0$$

такие, что $0 \neq \lambda_i(t) \in C_{\Delta}^1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_i \neq \infty (i = 1, 2)$.

Для системы (1) с указанными условиями изучались особые случаи для теорем из работы [1] (в которой рассматривались системы размерности $n \geq 1$), а именно при $t \rightarrow +\infty$:

- 1) $\lambda_i(t) : \Delta \rightarrow \mathbf{R}, \lambda_1(t) \rightarrow \lambda_1^0 \neq 0, \lambda_2(t) = o(1)$;
- 2) $\lambda_i(t) : \Delta \rightarrow \mathbf{R}, \lambda_i(t) = o(1) (i = 1, 2)$;
- 3) $\lambda_i(t) : \Delta \rightarrow \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda_i(t) = o(\operatorname{Im} \lambda_i(t)) (i = 1, 2)$.

1. **Костин А.В.** Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №3. – С.524-526.

ОБОСНОВАНИЕ ПОЛНОЙ СХЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ
НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Т.А. КОМЛЕВА¹, А.В. ПЛОТНИКОВ²

¹Кафедра высшей математики

²Кафедра прикладной, вычислительной математики и САПР
Одесская государственная академия строительства и
архитектуры

e-mail:t-komleva@ukr.net a-plotnikov@ukr.net

Рассмотрим следующую нечеткую систему с малым параметром

$$\dot{x} = \varepsilon[F(t, x) + \int_0^t \Phi(t, s, x(s))ds], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$, $s \in R_+$, $F : R_+ \times E^n \rightarrow E^n$ - нечеткое отображение, $\Phi : R_+ \times R_+ \times E^n \rightarrow E^n$ - нечеткое отображение, $x_0 \in E^n$.

Поставим в соответствие системе (1) следующую усредненную систему

$$\dot{y} = \varepsilon[\bar{F}(y) + \int_0^t \bar{\Phi}(t, y(s))ds], \quad y(0) = x_0,$$

где $\lim_{T \rightarrow \infty} D \left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt, \bar{F}(x) \right) = 0$,

$$\bar{\Phi}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t} \Phi_1(t, x), & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \Phi_1(t, x), & t = 0, \end{cases} \quad \Phi_1(t, x) = \int_0^t \Phi(t, s, x) ds.$$

В докладе обосновывается возможность применения данной схемы усреднения для системы (1) на конечном промежутке [1].

1. **Plotnikov A. V.** The Full Averaging Of Fuzzy Integrodifferential Equations / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva // Journal Advanced Research in Dynamical and Control Systems. — 2012. — Vol. 4, № 1. — P. 48-59.

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ З
ВИРОДЖЕННЯМИ

І.І. КОРОЛЬ

Кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики
Ужгородський національний університет
e-mail: korol.ihor@gmail.com

Розглядаються T -періодичні системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in R \setminus \tau_i, x \in R^n, \quad (1)$$

та імпульсною дією вигляду

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \quad (2)$$

де $B(t)$, $A(t)$ – $(n \times n)$ -вимірні матриці з достатню кількість раз неперервно диференційовними компонентами, $\text{rank} B(t) = r < n$, $B(t+T) = B(t)$, $A(t+T) = A(t)$, $f(t)$ – n -вимірна неперервна функція, $f(t+T) = f(t)$, $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_p < T$, $\tau_{i+p} = \tau_i + T$, M_i , N_i – прямокутні $(m_i \times n)$ -вимірні дійсні сталі матриці, $1 \leq m_i \leq n$, $M_{i+p} = M_i$, $N_{i+p} = N_i$. Припускаємо, що диференціально-алгебраїчна система (1) зводиться до центральної канонічної форми [1,2].

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо T -періодичну кусково неперервно диференційовану на $R \setminus \tau_i$ функцію $x(t) = x_i(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Встановлено необхідні та достатні умови існування T -періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчних систем (1) з імпульсною дією (2), з'ясовано їх структуру та вказано спосіб побудови розв'язків.

1. **Campbell S.L., Petzold L.R.** Canonical forms and solvable singular systems of differential equations// SIAM J. Algebr. Discrete Methods. — 1983.— № 4.— Р. 517-521.
2. **Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.** Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.

ОБ ОДНОМ ПОНЯТИИ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ
В КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

К.Н. Кудрявцев

Кафедра математического анализа
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: kudrk@mail333.com

Рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle.$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков, $X_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ — множество стратегий x_i у i -го игрока ($i = 1, 2$), ситуация игры $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ ($n = n_1 + n_2$), неопределенные факторы $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$, $f_i(x, y)$ — функция выигрыша игрока i .

Используя примененный в [1] (для бескоалиционных игр) подход, основанный на построении аналога векторного максимина, определим понятие сильно гарантированного решения (СГР) в игре Γ . Формализацию проведем в два этапа:

Этап 1. Каждой ситуации $x \in X$ и каждому игроку $i = 1, 2$ поставим в соответствие единственную непрерывную на X вектор-функцию $y^{(i)}(x) : X \rightarrow Y$ такую, что

$$f_i(x, y^{(i)}(x)) = \min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i[x] \quad (i = 1, 2).$$

Этап 2. Игре Γ сопоставим кооперативную игру двух лиц с побочными платежами (без неопределенностей) — «игру гарантий»

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x]\}_{i=1,2} \rangle,$$

и найдем для нее гарантированный дележ, а именно ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ и вектор $f^e = (f_1^e, f_2^e) \in \mathbf{R}^2$, для которых выполнены условия коллективной и индивидуальной рациональности.

Полученная в результате пара (x^e, f^e) и есть СГР игры Γ .

Автор благодарит проф. В.И. Жуковского за замечания.

1. **Жуковский В. И.** Гарантированные решения конфликтов и их приложения / Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. — М.: URSS, Красанд, 2013. — 368 с.

ON EXISTENCE OF SOLUTIONS TO ILL-POSED OPTIMAL
CONTROL PROBLEMS IN COEFFICIENTS FOR
VARIATIONAL INEQUALITIES OF MONOTONE TYPE

O.P. KUPENKO, N.V. ZADOIANCHUK

Department of System Analysis and Control
National Mining University, Dnipropetrovsk, Ukraine
e-mail: kogut_olga@bk.ru

Department of Integral and Differential Equations
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

We study an optimal control problem for a nonlinear degenerate elliptic variational inequality with homogeneous Dirichlet boundary conditions. The controls are taken as a matrix of coefficients $\mathcal{U} = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^N$ from $L_\infty^{N \times N}(\Omega)$ in the main part of nonlinear operator $A(\mathcal{U}, y) = - \sum_{i,j=1}^N \rho a_{ij} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}$, where $\rho \in L_{loc}^1(R^N)$ is a degenerate weight function. Since these types of variational inequalities can exhibit the Lavrentieff phenomenon, the optimal control problem in coefficients is considered in the so-called class of H -admissible solutions. Using a special version of Compensated Compactness Lemma in variable Lebesgue and Sobolev spaces and the direct method of Calculus of Variations we prove the solvability of the above optimal control problem.

More precisely, we consider the following OCP

$$\begin{aligned} I(U, y) &= \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p + \|U\|_{L_\infty^{N \times N}(\Omega)} dx \rightarrow \inf, \\ &U \in M_p(\Omega), y \in K, \\ \langle -\operatorname{div}(U(x)\rho(x)[(\nabla y)^{p-2}]\nabla y), v - y \rangle_W &\geq \langle f, v - y \rangle_W, \forall v \in K \end{aligned}$$

where $[\eta^{p-2}] = \operatorname{diag}\{|\eta_1|^{p-2}, |\eta_2|^{p-2}, \dots, |\eta_N|^{p-2}\} \forall \eta \in R^N$.

Here, $\Omega \subset R^N$ is a bounded open subset with smooth boundary, $z_\partial \in L^p(\Omega)$ and $f \in L^q(\Omega)$ are fixed elements, $M_p(\Omega) \subset L_\infty^{N \times N}(\Omega)$ is a class of admissible controls, K is a closed convex subset of W , where W is a set of functions $y \in W_0^{1,1}(\Omega)$ for which the norm $\|y\|_\rho =$

$$\left(\int_\Omega \left(|y|^p + \rho \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right)^{1/p} \text{ is finite.}$$

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА

Л. И. Кусик

Кафедра высшей и прикладной математики
Одесский национальный морской университет
e-mail: ludakusik@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1)$$

где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} ($i \in \{0, 1\}$) – односторонняя окрестность Y_i , Y_i ($i \in \{0, 1\}$) равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом также предполагается, что числа μ_i ($i = 0, 1$), определяемые равенством

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i = +\infty, \quad \text{либо } Y_i = 0 \quad \text{и} \\ & \Delta_{Y_i} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i = -\infty, \quad \text{либо } Y_i = 0 \quad \text{и} \\ & \Delta_{Y_i} - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

таковы, что

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \mu_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0.$$

Определение Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если для него соблюдаются условия

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[\quad , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Исследован вопрос существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - решений уравнения (1) в особом случае: $\lambda_0 = 0$. Также установлены асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ - решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$.

АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В
ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО
КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ
КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Л.И. ЛАВРИНОВИЧ

Кафедра методов оптимального управления
Белорусский государственный университет
e-mail:lavrinovich@bsu.by

В докладе рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе, имеющая вид

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)u, x(t_*) = x_*, \quad (1)$$

$$x(t^*) = 0, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (x'Q(t)x + u'P(t)u)dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_* , t^* заданные моменты времени ($t_* < t^*$), x – вектор фазового состояния системы, u – вектор управления, $Q(t) \geq 0$, $P(t) > 0$, $t \in [t_*, t^*]$, – симметрические матрицы.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N=0, 1, \dots$) в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $o(\mu^N)$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) , ($t_* < t^*$), имеет место $u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, – асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1), (2).

Доклад посвящен построению асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядка в рассмотренной задаче. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ НА ГРАФЕ

Н.А. МАНАКОВА

Кафедра уравнений математической физики
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: manakova@susu.ac.ru

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ – множество дуг, причем каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения ребра $d_j > 0$. Нас интересует задача Шоултера – Сидорова для уравнений нелинейной диффузии на графе $\mathbf{G}$

$$x_j(0, t) = x_k(l_k, t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i) \cup E^\omega(V_i); \quad (1)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k, t) = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)(x_j(s, 0) - x_{j0}(s)) &= 0, \quad s \in (0, l_j); \\ \lambda x_{jt} - x_{jsst} - \operatorname{div}(|x_{js}|^{p-2} x_{js}) &= u_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Построим пространства $\mathcal{H} = L_p(\mathbf{G}) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in L_p(0, l_j)\}$, $\mathcal{B} = W_p^1(\mathbf{G}) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_p^1(0, l_j), \text{ причем выполнено (1)}\}$. Обозначим через $\mathcal{B}^*$ сопряженное к $\mathcal{B}$ в смысле двойственности в $L_2(\mathbf{G})$. Фиксируем $T \in \mathbf{R}_+$. Выделим в пространстве $\mathcal{U} = L_q(0, T; \mathcal{B}^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ замкнутое и выпуклое множество $\mathcal{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу [1]

$$J(x, u) = \frac{1}{p} \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathcal{B}}^p dt + \frac{N}{q} \int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{B}^*}^q dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений задачи (1), (2) для оператора Лапласа $-\Delta$, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности.

Теорема 1. Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда существует оптимальное управление в задаче (1) – (4).

1. **Свиридюк Г. А.** Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г. А. Свиридюк, Н. А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 144-151.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

О.П. МАТВЕЕВА, Т.Г. СУКАЧЕВА

Кафедра алгебры и геометрии

Новгородский государственный университет

oltan.72@mail.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \lambda \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^k \beta_l \nabla^2 w_l - g q \theta - \bar{p} + f, \\ 0 = (\nabla \cdot v), \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in R_-, \quad l = \overline{1, k}, \\ \theta_t = \kappa \nabla^2 \theta - v \cdot \nabla \theta + v \cdot q \end{array} \right. \quad (1)$$

моделирует эволюцию скорости $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = v_i(x, t)$, давления $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = p_i(x, t)$ и температуры $\theta = \theta(x, t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта порядка $k > 0$. Параметры $\lambda \in R$, $\nu \in R_+$ и $\kappa \in R_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность, $\beta_l \in R_+$, $l = \overline{1, k}$ определяют время ретардации давления, $g \in R_+$ – ускорение свободного падения; $q = (0, \dots, 0, 1)$ – орт в R^n , $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(x)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость.

Система (1) рассматривается при $k = 1$ и $f \equiv 0$. Вводится функция тока $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, где $\psi = \psi(x, y, t)$. Для преобразованной системы (1) рассматривается задача Коши-Бенара. На основе результатов [1] в системе Maple разработана программа [2], которая позволяет методом Галеркина численно находить решение указанной задачи, получать его графическое изображение.

1. **Сукачева Т.Г.** Задача термоконтвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О. П. Матвеева // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11(174). – С. 46-53.
2. **Численное** решение начально-краевой задачи для модели термоконтвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О. П. Матвеева, правообладатель: Матвеева О.П. (RU). – №2012612862, зарегистр. 22.03.2012. – Реестр программ для ЭВМ.

ОДНА ЗАДАЧА ВСТРЕЧИ N НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

И.В. Молчанюк¹, Л.И. Плотникова²

¹Кафедра прикладной, вычислительной математики и САПР
Одесская государственная академия строительства и
архитектуры
e-mail: i-molchanuik@ukr.net

²Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский национальный политехнический университет

Рассмотрим N линейных управляемых дифференциальных включений с нечеткими параметрами

$$\dot{x}^i \in A^i(t)x^i + B^i(t, u^i)V^i, \quad x^i(0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $x^i \in R^n$ - фазовый вектор; $t \in R_+$ - время; $A^i(t) : R_+ \rightarrow R^{n \times n}$ - матричные функции ($n \times n$); $B^i(t, u^i) : R_+ \times R^{k_i} \rightarrow R^{n \times m_i}$ - матричные функции ($n \times m_i$); $u^i \in U^i \subset R^{k_i}$ - управляющие параметры; $V^i \in E^{m_i}$ - нечеткие множества; $x_0^i \in R^n$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (задача встречи): необходимо найти минимальное время T^* и допустимые управления $u_*^i(t) \in U^i$, $i = 1, \dots, N$ такие, что нечеткие R-решения системы (1) удовлетворяют условию:

$$\bigcap_{i=1}^N X^i(T^*, u_*^i) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Определение. Набор $(T^*, u_*^1(\cdot), \dots, u_*^N(\cdot))$ будем называть оптимальным, если $\bigcap_{i=1}^N X^i(T^*, u_*^i) \neq \emptyset$ и $\bigcap_{i=1}^N X^i(\tau, u^i) = \emptyset$ для каждого $0 \leq \tau < T^*$ и всех $u^i(t) \in U^i$, $i \in \{1, \dots, N\}$.

В докладе приводятся необходимые условия оптимальности набора $(T^*, u_*^1(\cdot), \dots, u_*^N(\cdot))$ для задачи встречи (1),(2)[1].

1. **Plotnikov A. V.** Problem of meeting of N of fuzzy objects / A. V. Plotnikov, I. V. Molchanyuk, L. I. Plotnikova // Journal of Advanced Research in Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 4, № 2. — P. 8-15, doi: 10.5373/jaram.1192.112611.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ ПОЛУЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
СИСТЕМ

С.С. НАВРОЦКИЙ, Г.Е. САМКОВА

Кафедра дифференциальных уравнений

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: SamkovaGalina@i.ua

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида:

$$t\dot{y} = Py + f(t, y, \dot{y}), \quad (1)$$

где $t \in (-\Delta, \Delta)$, $\Delta > 0$, $P \in R^{n \times n}$, вектор-функция $f : (-\Delta, \Delta) \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ голоморфна в точке $(0, 0, 0)$, и ее разложение в окрестности этой точки не содержит свободного и линейного членов. Решается задача о существовании не голоморфных решений системы (1), удовлетворяющих условиям

$$y(t) \rightarrow 0, \dot{y}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +0, \quad (2)$$

представимых в виде отрезка ряда по степеням t и $\ln t$.

Коэффициенты формальных решений задачи (1)-(2), представимых в виде рядов по степеням t и $\ln t$, должны удовлетворять двум видам систем. Особый интерес представляет система, содержащая регулярный или сингулярный пучок матриц.

Найдены достаточные условия существования решений задачи (1)-(2), асимптотически равных при $t \rightarrow +0$ отрезкам построенных формальных рядов. Изучен вопрос о параметрическом семействе таких решений.

1. **Самкова Г. Е.** О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных дифференциальных систем / Галина Самкова // Reports of enlarged session of seminar of L.N. Vekua Institute of applied mathematics. Tbilisi. — 1992. — Vol. 7, № 3. — С. 85-88.
2. **Самкова Г. Е.** Об асимптотическом поведении некоторых решений полуявных систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Брио и Буке. / Г. Е. Самкова // International V.YA/ Skorobohatko mathematical conference, Drohobych, Ukraine : междунар. мат. конф., 19-23 сент. 2011 г. : тезисы докл. — Дрогобыч, 2011. — С. 180.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ С
НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

О.А.ОЧАКОВСКАЯ

Отдел теории функций

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

e-mail:ochakovskaja@yandex.ua

Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Для всякой области $O \subset R^n$ и фиксированного $r > 0$ символом $V_r(O)$ обозначим множество всех функций $f \in L^1_{loc}(O)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , лежащих в O (если O не содержит таких шаров, то мы полагаем $V_r(O) = L^1_{loc}(O)$). Описание классов $V_r(O)$ для различных O было получено в [1, part 2]. В данной работе рассматривается следующая проблема (см [1, part 2, problem 4.15]).

ПРОБЛЕМА 1. Пусть O – неограниченная область в R^n и $r > 0$ фиксировано. Предположим, что $f \in V_r(O)$ и для почти всех $x \in O$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq F(|x|), \quad (1)$$

где F – заданная положительная функция на $[0, +\infty)$. Для каких F, O, r отсюда следует, что $f = 0$?

Автором получено решение проблемы 1 для широкого класса областей O , содержащих полупространство

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}.$$

1. **Volchkov V.V.** Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer. 2003. – 454 p.

ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Ю.М. ПЕРЕСТЮК

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Perestyuk@gmail.com

Розглянемо двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x} = Ax + \epsilon f_0(x), \quad x_2 \neq kx_1; \quad \Delta x \Big|_{x_2=kx_1} = Bx \quad (1)$$

в якій $x = \text{col}(x_1, x_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad f_0(x) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення $(E+B) : x \rightarrow (E+B)x$ площини (x_1, x_2) в себе переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю

$$\mu = \frac{k(1+b_{22})+b_{21}}{1+b_{11}+kb_{12}}.$$

Теорема 1. Нехай в системі (1) $\lambda < 0$, функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\mu < k$ і виконується рівність $\gamma = (1+b_{11}+b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = 1$. Якщо рівняння

$$F(x_1) \equiv \frac{1}{x_1} \int_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau} [g(x_1 e^{\lambda\tau}, x_1(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) - (\mu+\tau+\frac{1}{\lambda}) \cdot f(x_1 e^{\lambda\tau}, x_1(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})] d\tau = 0$$

має ізольований корінь x_1^* , такий, що $F'(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ вихідна система має розривний одноімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(x_1^*) < 0$ і $x_1^* > 0$, або ж $F'(x_1^*) > 0$, а $x_1^* < 0$, і нестійким, якщо

$F'(x_1^*) > 0$ і $x_1^* > 0$ або ж $F'(x_1^*) < 0$ і $x_1^* < 0$. Цей цикл міститься в деякому $U(\epsilon)$ -околі ($U(\epsilon) \rightarrow 0$, коли $\epsilon \rightarrow 0$) лінії

$$x_2 = x_1(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^*}), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

ПРО МЕТОД БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧІ
СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ
СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

В.В. Пічкур, Є.М. СТРАХОВ

Кафедра моделювання складних систем

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

e-mail: vpichkur@gmail.com, swebus86@gmail.com

Розглядаються задачі оптимального керування динамічними системами, функція керування яких задається в структурно-параметричному вигляді. Одна з постановок задач полягає у тому, щоб при фіксованих точках перемикання визначити набори параметрів для кожного часового інтервалу таким чином, щоб мінімізувати критерій якості. У другій постановці порядок розташування функцій керування та точки перемикання між ними не є фіксованими, і ставиться задача оптимізації всієї структури системи, а також її параметрів.

Для вказаних постановок задач структурно-параметричної оптимізації дискретних і неперервних систем доведена справедливність принципу оптимальності, встановлені достатні умови оптимальності у формі Беллмана. Побудовані алгоритми знаходження оптимальних параметрів лінійних систем з квадратичним функціоналом якості у випадку фіксованої структури керування. Запропоновано підхід до розв'язування задач при нефіксованих точках перемикання.

1. **Пічкур В. В.** Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхів // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2010. — Т. 15. — вип. 19. — С. 94–102.
2. **Strakhov E. M.** Dynamic Programming in Structural and Parametric Optimization / E. M. Strakhov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 82, no. 3. — P. 503–512.

Розглянемо лінійне нечітке рівняння із запізненням

$$x'(t) = \varepsilon[A(t)x(t) + A_1(t)x(\alpha(t)) + f(t)], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

де ε – малий параметр, $t \in \mathbb{R}_+$ – час, $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{E}^n$ – фазова змінна, матриці $A, A_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, нечітке відображення $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{E}^n$, $0 \leq \alpha(t) \leq t$ змінне запізнення.

Рівнянню (1) поставимо у відповідність усереднене рівняння:

$$y'(t) = \varepsilon[\bar{A}(t)y(t) + \bar{A}_1(t)y(\alpha(t)) + \bar{f}(t)], \quad y(0) = x_0, \quad (2)$$

де $\bar{A}(t) = \frac{1}{\omega} \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} A(s)ds$, $\bar{A}_1(t) = \frac{1}{\omega} \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} A_1(s)ds$, $\bar{f}(t) = \frac{1}{\omega} \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} f(s)ds$, $t \in [i\omega, (i+1)\omega)$, $i = 0, 1, \dots$

Теорема. Нехай в області $G = \{t \geq 0, x \in Q \subset \mathbb{E}^n\}$ виконуються умови:

1. матриці $A(t), A_1(t)$ неперервні і обмежені;
2. відображення $f(t)$ слабо неперервне і обмежене;
3. функція $\alpha(t)$ рівномірно неперервна при $t \geq 0$ і $0 \leq \alpha(t) \leq t$;
4. розв'язок $y(\cdot)$ системи (2) з початковою умовою $y(0) = x_0 \subset Q' \subset Q$ визначений при $t \geq 0$, $\varepsilon \in (0, \sigma]$ і разом з ρ -околом належить області Q .

Тоді для будь-якого $L > 0$ існують $C(L) > 0$ і $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ такі, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка $D(x(t), y(t)) \leq C\varepsilon$, де $x(\cdot), y(\cdot)$ – розв'язки (1) і (2) відповідно такі, що $x(0) = y(0) = x_0 \in Q$.

1. Полетаєва О. В., Скрипник Н. В. Усереднення лінійних нечітких диференціальних рівнянь із запізненням / О. В. Полетаєва, Н. В. Скрипник // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2012. – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 27–37.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О.А. Рузакова, Е.А. Олейник

Кафедра математического моделирования,
кафедра уравнений математической физики
ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"
(НИУ)

e-mail: oruzakova@gmail.com, oleynikkaterinaa@gmail.com

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ .
Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

для линеаризованной системы уравнений Осколкова

$$(1 - \chi \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v - \nabla p + u, \quad (3)$$

$$0 = -\nabla(\nabla \cdot v), \quad (4)$$

которая моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта [1]. Параметр $\nu \in R_+$ характеризует вязкое, а параметр $\chi \in R$ – упругие свойства жидкости. В работе [2] задача (1) – (4) редуцирована к задаче Коши $x(0) = x_0 \in \text{dom} M$ для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad t \in (x, t).$$

Используя результаты, изложенные в работе [3], авторами работы исследуется ε -управляемость системы (1) – (4).

1. **Осколков А.П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкости Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. МИАН. – 1988. – Т.179. – С. 126 – 164.
2. **Sviridyuk G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. **Федоров В. Е.** Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / Федоров В.Е., Рузакова О.А. // Мат. заметки. – 2003. – Вып.4. – С. 618 – 628.

UNIQUENESS THEOREMS FOR SPHERICAL MEANS

I. M. SAVOSTYANOVA, VIT. V. VOLCHKOV

Chair of the mathematical analysis and the theory of functions

Donetsk National University

e-mail: cavost@mail.ru

Generalizations of the class of functions having zero integrals over spheres of a fixed radius are studied. An analogue of John's uniqueness theorem for weighted spherical means on sphere is obtained.

Let $\mathbf{S}^2$ be the standard unit sphere in $\mathbf{R}^3$ with the inner metric d , $B_R = \{\xi \in \mathbf{S}^2 : d(o, \xi) < R\}$ be the open geodesic ball of radius R with center at the point $o = (0, 0, 1) \in \mathbf{S}^2$. Let r be a fixed number belonging to the interval $(0; \pi)$ and $r < R$. Denote by $\overline{B}_r$ the closure of B_r , $S_r = \{\xi \in \mathbf{S}^2 : d(o, \xi) = r\}$. Let $SO(3)$ be the group of rotations in $\mathbf{R}^3$. For fixed $M \in \mathbf{Z}_+$ we put

$$U_{r,M}(B_R) = \{f \in C(B_R) : \int_{S_r} f(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = 0 \\ \forall \tau \in SO(3) : \tau\overline{B}_r \subset B_R\},$$

where ξ_1, ξ_2, ξ_3 are the Cartesian coordinates of a point $\xi \in \mathbf{S}^2$ and $dl(\xi)$ is the length element on $\mathbf{S}^2$. We define $U_{r,M}^\infty(B_R) = U_{r,M}(B_R) \cap C^\infty(B_R)$.

Theorem 1. *Let $f \in U_{r,M}^\infty(B_R)$ and $f = 0$ in B_r . Then $f = 0$ in B_R .*

A similar result on Euclidean space was established before by V.V. Volchkov in [1]. For other analogs of John's uniqueness theorem, see [2] – [4].

1. **Volchkov V. V.** Mean value theorems for a class of polynomials / Volchkov V. V. // Sibirsk. Mat. Zh. — 1994. — № 4. — P. 737-745.
2. **Volchkov V. V.** Integral geometry and convolution equations / Volchkov V. V. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003. — 454 p.
3. **Volchkov V. V.** Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. — London : Springer, 2009. — 671 p.
4. **Volchkov V. V.** Offbeat integral geometry on symmetric spaces / Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. — Basel : Birkhäuser, 2013. — 592 p.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.А. САГАДЕЕВА

Кафедра информационно-измерительной техники
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
e-mail: sam79@74.ru

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ – банаховы пространства; $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, $N \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha; \mathcal{F})$ ($\mathcal{U}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{U}$). Для полулинейных уравнений вида

$$L\dot{u} = Mu + N(u) \quad (1)$$

устойчивость решений означает существование инвариантных многообразий решений. Существование таких многообразий для (1) в условиях (L, p) -ограниченности M [1] описано в [2], при (L, p) -секториальности – в [3], а при (L, p) -радиальности – в [4].

Из этих работ можно резюмировать следующее. Для существования инвариантных многообразий (1) требуется:

- 1) оператор M одного из указанных классов при $p \in \mathbf{N}$ ($p < \infty$) и фазовое пространство (1) – простое гладкое многообразие;
- 2) оператор N таков, что $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbf{O}$ (здесь N'_0 – производная Фреше в начале координат пространства $\mathcal{U}_\alpha$);
- 3) если M – (L, p) -ограничен или (L, p) -секториален, то требуется $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbf{R}\} = \emptyset$, а если (L, p) -радиален, то – существует $\omega > 0$, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbf{C} : -\omega \leq \operatorname{Re} \mu \leq \omega\} = \emptyset$ и σ_+ – ограничено.

1. **Sviridyuk G.A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
2. **Китаева О.Г.** Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Неклас. уравн. мат. физики: тр. семинара, посвящ. 60-летию проф. В.Н. Врагова / Ин-т матем. им. С.Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск, 2005. – С. 161–166.
3. **Загребина С.А.** Существование и устойчивость решений одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М. М. Якупов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – 2008. – Вып. 2. – С. 10–18.
4. **Сагадеева М.А.** Существование и устойчивость решений полулинейных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае / М.А. Сагадеева // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия Математика. – 2013. – № 12. – С. 78–88.

У даній роботі розглядається модифікований метод спряжених градієнтів:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

де

$$p_k = -H_k f'(x^k) + \xi_k H_{k-1} p_{k-1},$$

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}\{f(x_k + \alpha^k p_k)\},$$

$$\xi_k = -\frac{1}{\|f'(x_k)\|} (f'(x_k), f'(x_k) - f'(x_{k-1})).$$

Матриця H_k рахується рекурентно за формулою:

$$H_k = H_{k-1} + \frac{\Delta x_{k-1} (\Delta x_{k-1})^T}{(\Delta x_{k-1})^T \Delta q_{k-1}} - \frac{H_{k-1} \Delta q_{k-1} (H_{k-1} \Delta q_{k-1})^T}{(\Delta q_{k-1})^T H_{k-1} \Delta q_{k-1}}.$$

Доведена теорема про збіжність методу. На 10 тестових функціях метод порівнювався з методом спряжених градієнтів. У всіх випадках при різних початкових даних метод модифікований працює краще за спряжених градієнтів.

1. **Пшеничний Б. Н., Данилін Ю. М.** Чисельні методи в екстремальних задачах. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
2. **Карманов В. Г.** Математичне програмування. — М.: ФІЗМАТЛІТ, 2004. — 264 с.

ЗАДАЧА ПРАКТИЧНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

М.С. САСОНКІНА

Кафедра обчислювальної математики

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова.

e-mail: masonmas@gmail.com

Розглянемо систему керування вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – вектор, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^*$ – вектор керування, $u(k) \in U(k)$, $U(k) \in \text{comp}(R^m)$ – множина обмежень на керування, $0 \in \text{int}U(k)$, $f_k : D \rightarrow \text{comp}(D)$ – багатозначне відображення, яке визначене в області $D \subset R^n$, $0 \in f_k(0, 0)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Позначимо U – множину допустимих керувань, $x(k, x_0, u)$ – розв’язок включення (1) з початковими умовами $x(0) = x_0$ і керуванням $u \in U$. Нехай $\hat{G}_0 \in \text{comp}(R^n)$ – множина початкових умов, $\Phi(k) \in \text{comp}(R^n)$ – множина фазових обмежень, $0 \in \hat{G}_0$, $0 \in \text{int}\Phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Означення 1. Дискретне включення (1) називається $\{\hat{G}_0, \Phi(k), 0, N\}$ – стабілізованим, якщо для будь-якого $x_0 \in \hat{G}_0$ існує допустиме керування $u \in U$ таке, що практично стабілізує дискретне включення (1) з точки $x_0 \in \hat{G}_0$ в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Позначимо через G_* – максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких виконується означення 1. Тоді множина $\hat{G}_*$ є компактом.

Теорема 1. Нехай точка $x_0 \in \partial\hat{G}_*$. Тоді серед керувань $u \in U$, що практично стабілізують включення (1) з точки $x_0 \in \hat{G}_*$ в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$ існує таке, що гранично стабілізують включення (1) з точки $x_0 \in \hat{G}_*$ в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Теорема 2. Нехай точка $x_0 \in \hat{G}_*$ і нехай $u_* \in U$ – керування, що гранично стабілізує включення (1) з точки $x_0 \in \hat{G}_*$ в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Тоді точка $x_0 \in \partial\hat{G}_*$.

ВИРОДЖЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ
СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г.Я. СЕМЧИШИН

Кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики
Ужгородський національний університет
e-mail: Haly_Semchushun@mail.ru

Розглядається вироджена нелінійна система диференціальних рівнянь

$$J \frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

яка задовольняє лінійні функціональні умови

$$ly(\cdot) = d, \quad (2)$$

де J – нільпотентний блок Жордана розмірності n , $A(t)$ – $(n \times n)$ -вимірна матриця, $f(t, y)$ – n -вимірна вектор-функція, l – лінійний векторний функціонал визначений на просторі $(n-1)$ -вимірних, неперервних на $[a, b]$ вектор-функцій: $l : C[a, b] \rightarrow R^{n-1}$, $d \in R^{n-1}$ – сталий вектор. За припущенням, що $f_n(t, y) = f_n(t, y_2, \dots, y_n)$, вироджена нелінійна крайова задача (1), (2) зводиться до крайової задачі вигляду

$$\frac{dv}{dt} = A_1(t)v(t) + \bar{f}(t, v), \quad (3)$$

$$l_1 v(\cdot) = d, \quad (4)$$

де $A_1(t)$ – $((n-1) \times (n-1))$ -вимірна матриця, $\bar{f}(t, v)$ – $(n-1)$ -вимірна вектор-функція, $l_1 : C[a, b] \rightarrow R^{n-1}$.

У критичному випадку побудовано k -параметричну рекурентну послідовність функцій [1], яка збігається до граничної функції $v^*(t, \xi)$. Встановлено необхідні та достатні умови, при яких гранична функція $v^*(t) = v^*(t, \xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (3), (4). Крім того, знайдено оцінки збіжності послідовних наближень.

На підставі цього одержано необхідні та достатні умови існування розв'язків виродженої нелінійної крайової задачі (1), (2).

1. **Самойленко А.М.** Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев: Наукова думка, 1992.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ПРЯМІЙ З ВИПАДКОВОЮ
ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Г.І. СЛИВКА-ТИЛИЩАК

Кафедра теорії імовірностей, статистики та актуарної
математики

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: aslyvka@tn.uz.ua

В роботі досліджується неоднорідне рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною. Ми розглядаємо праву частину, як випадкову функцію з простору $L_p(\Omega)$.

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій [1]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \xi(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2)$$

Нехай $\xi(x, t) = \{\xi(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0\}$ — вибірково-неперервне випадкове поле з простору $L_p(\Omega)$, таке що $E\xi(x, t) = 0$, $E(\xi(x, t))^2 < +\infty$.

Нехай

$$G(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x, \tau) dx, \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y, t) dy.$$

У роботі знайдено умови при яких функція $u(x, t)$ з імовірністю одиниця, буде класичним розв'язком задачі (1)–(2), а також знайдено оцінки для розподілу супремуму розв'язку.

1. **Маркович Б.М.** Рівняння математичної фізики / Б.М. Маркович — Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2010. — 384 с.

О ГАРАНТИРОВАННОМ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ
РЕШЕНИИ ОДНОЙ ИГРЫ

И.С. СТАВУЛИТ

Кафедра математики

Челябинская государственная агроинженерная академия

e-mail: irisku76@mail.ru

Рассмотрена кооперативная игра при неопределенности

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков, $X_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ - множество стратегий x_i i -го игрока, ситуации $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$, множество нестохастических неопределенностей y есть $Y \subseteq \mathbf{R}^m$, $f_i(x, y)$ - скалярная функция выигрыша i -го игрока ($i = 1, 2$). Для каждой пары $(x, y) \in X \times Y$ определена также функция риска $\Phi_i(x, y)$ игрока $i = 1, 2$ из [1].

Гарантированным по исходам и рискам решением (ГИРР) игры (1) назовем пятерку $(x^S, f_1^S, f_2^S, \Phi_1^S, \Phi_2^S) \in X \times \mathbf{R}^4$, для которой существует неопределенность $y_S \in Y$ такая, что *во-первых*, неопределенность y_S является минимальной по Слейтеру в четырехкритериальной задаче $\langle Y, \{f_i(x^S, y), -\Phi_i(x^S, y)\}_{i=1,2} \rangle$;

во-вторых, ситуация $x^S \in X$ максимальна по Слейтеру в 4-критериальной задаче $\langle X(y_S), \{f_i(x, y_S), -\Phi_i(x, y_S)\}_{i=1,2} \rangle$, где $X(y_S)$ - множество ситуаций, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности для функций выигрыша $f_i(x, y_S)$ ($i = 1, 2$) в кооперативной игре, полученной из (1) при фиксированной неопределенности $y = y_S$.

При этом $F^S = (f_1^S, f_2^S, \Phi_1^S, \Phi_2^S)$ назовем гарантированным по исходам и рискам дележем игры (1), а x^S - гарантирующей по исходам и рискам ситуацией.

При стандартных (для теории игр) ограничениях установлено существование ГИРР в чистых и смешанных стратегиях.

Автор благодарит проф. В.И. Жуковского за замечания.

1. **Кудрявцев К.** Побочные платежи в одной кооперативной игре с учетом рисков / К. Кудрявцев // Вестник ЮурГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2011. — № 10(227). — С. 25-29.

ПРО ЗВІДНІСТЬ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ
РІВНЯНЬ

Ю.В. ТЕПЛІНСЬКИЙ

Кафедра диференціальних рівнянь

Кам'янець-Подільський національний університет імені

Івана Огієнка

e-mail: yuriy-teplinsky@yandex.ru

Добре відомо, що в наш час у багатьох галузях природознавства застосовується теорія еволюційних рівнянь з квазіперіодичними та майже-періодичними коефіцієнтами. У дослідженнях проблеми звідності квазіперіодичної системи диференціальних рівнянь, визначеної у скінченновимірному просторі, А.М. Самойленко успішно застосував метод прискореної збіжності. Аналогічні задачі пізніше розглядалися для рівнянь різних типів, зокрема для диференціальних рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей, які часто називають зліченими системами [1]. В [2] опубліковано результати, що стосуються звідності злічених систем нелінійних різницеви майже-періодичних рівнянь і звідності нелінійних різницеви рівнянь, визначених в абстрактному банаховому просторі, в околі їх інваріантних множин. У цій доповіді обговорюються достатні умови звідності в сенсі Ляпунова лінійного періодичного різницевого рівняння в просторі обмежених числових послідовностей, застосовано метод прискореної збіжності та метод укорочення К.П. Персидського [3] до розв'язування задачі звідності у цьому просторі різницеви рівнянь, що визначені на торах скінченної та нескінченної розмірностей. Подані тут результати частково викладено в [2].

1. **Samoilenko A. M.** Countable Systems of Differential Equations / Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 287 p.
2. **Самойленко А. М.** Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах / Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. — К: Ін-т математики, 2008. — 495 с. (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 72).
3. **Персидский К. П.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах / Персидский К. П. — Алма-Ата: Наука, 1976. — 247 с.

Изучается модель, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой подсистемы - системы автономных ОДУ. Связь между подсистемами задается параметром ε ; при $\varepsilon = 0$ модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае индивидуальная, а сама подсистема может быть линейной или нелинейной. В случае малых значений ε получим модель, содержащую слабо связанные подсистемы.

Естественным примером МССП в природе является Солнечная система. В математической постановке здесь имеем N -планетную задачу, состоящую в изучении движения системы из $N+1$ гравитирующих точек, одна из которых (Солнце) имеет массу, значительно превосходящую массы остальных точек. При пренебрежении взаимодействием этих точек между собой получаем N независимых задач двух тел (Солнце-планета), а влияние движения одной точки на движения других точек учитывается в рамках теории возмущений. Примером двухуровневой МССП будет система Солнце-планеты-спутники. Другие примеры МССП - это система взаимодействующих подвижных объектов (роботов, самолетов и т.п.), цепочки осцилляторов, пружинные системы, резонансный грохот и др.

Понятно, что в МССП динамика отдельной подсистемы оказывает влияние на динамику всей МССП. В случае, когда поведение всех подсистем, кроме одной, полностью описано, получаем задачу исследования отдельной системы под действием известного воздействия.

Неучтенная связь может привести к качественному динамическому эффекту. Так, в ограниченной задаче трех тел (введена в рассмотрение Л.Эйлером в 1764 г.) не учитывается действие точки малой массы на основные тела (нарушается третий закон Ньютона). Учет связи в общей (неограниченной) постановке зада-

чи приводит (Тхай, 1978) к "взрывной" неустойчивости, что происходит при достижении резонансных значений.

Возникает мысль о применении к МССП декомпозиции. Данный метод широко и эффективно применяется в теории устойчивости и управления (Матросов, Меркин, Zubov, Пятницкий, Черноусько и др.). МССП распадается на независимые подсистемы, когда параметр $\varepsilon = 0$. Иначе говоря, происходит естественная декомпозиция МССП на подсистемы. Что касается взаимосвязей в МССП, то они учитываются по "третьему закону Ньютона", т.е. как "действие равно противодействию". Последнее позволяет изучать более тонкие динамические свойства, чем при декомпозиции. Примеры конкретных МССП показывают, что МССП существует "де факто" независимо от применения того или иного метода исследования. В докладе излагается возможный подход к исследованию МССП, который, на взгляд автора, естественным образом отражает существо модели.

Предлагается основной естественный подход к исследованию МССП: классификация подсистем по типам (динамическим свойствам), выделение различных связок подсистем и последующий анализ этих связок. Подход используется для изучения колебаний, устойчивости, стабилизации, бифуркации, резонанса. Указанные задачи решаются для МССП, содержащей две подсистемы второго порядка в основной комбинации режимов колебаний в подсистемах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 14 ОЭММПУ РАН и РФФИ(13-01-00347).

МОНОТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДВУЧЛЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО

ПОРЯДКА

В. М. ХАРЬКОВ

Кафедра дифференциальных уравнений

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: kharkov_v_m@mail.ru

В работе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \alpha p(t)\varphi(y), \quad (1)$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) — непрерывная функция, $\varphi : I \rightarrow (0, +\infty)$ (I — левая или правая окрестность y_0 , $|y_0| \leq +\infty$) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi'(y) \neq 0 \text{ при } y \in I, \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in I}} \varphi(y) = \varphi_0, \varphi_0 \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in I}} \varphi'(y) \int_{y_1}^y \frac{ds}{\varphi(s)} = \sigma, \sigma \in R \setminus \{0\},$$

где $y_1 = y_0$, если $\int_{y_0}^y \frac{ds}{\varphi(s)}$ сходится, и $y_1 \in I$ — противном случае.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для уравнения (1) установлен следующий результат.

Теорема. Пусть $p(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \sqrt{p(t)}}{\int_A^t \sqrt{p(\tau)}} d\tau = \lambda$$

и имеет место неравенство $\alpha \lambda \sigma (1 - 2(1 + \sigma) \lambda) \varphi'(y) > 0$. Тогда уравнение (1) обладает монотонными решениями только двух видов: либо $y(t) = c + o(1)$, либо $y(t) = c \pi_\omega(t) [1 + o(1)]$ при $t \rightarrow \omega$, $c \in R \setminus \{0\}$.

ОБ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ ИЗМЕРЕНИЮ В ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Ю.В. Худяков

Кафедра уравнений математической физики
Южно-Уральский государственный университет (Национальный
исследовательский университет), Челябинск
e-mail: hudyakov74@gmail.com

Рассмотрим систему уравнений леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Du, \quad (1)$$

$$y = Nx. \quad (2)$$

В экономических приложениях (1) – стоимостная динамическая балансовая модель В.В. Леонтьева, где $Du(t)$ – величина конечного спроса на продукцию, в (2) $y(t)$ – показатель, используемый в критерии качества управления, определяемый через значения валового выпуска продукции $x(t)$. В технических приложениях (1), (2) – модель измерительного устройства (ИУ), где $u(t)$ – измеряемый сигнал, $y(t)$ – выходящий сигнал. L и M – матрицы $n \times n$, причем $\det L = 0$. Пусть $M - (L, p)$ -регулярна ($\exists \lambda \in \mathbf{C} : \det(\lambda L - M) = 0, \exists p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в противном случае), $\tau \in \mathbf{R}_+$. Для системы (1) зададим начальное условие Шоултера–Сидорова $[(\lambda L - M)^{-1}L]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0$,

Оптимальное измерение $v(t)$ – восстановленный (с использованием методов теории оптимального управления) по наблюдению $y_0(t)$ вход в систему. Для определения $v(t)$ с учетом инерционности и резонансов ИУ решается задача оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in \mathcal{U}_\partial} J(u),$$

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|y^{(q)}(t) - y_0^{(q)}(t)\|^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt.$$

В докладе обсуждаются численный метод нахождения оптимального измерения с учетом инерционности и резонансов ИУ, модельные примеры и интерпретация получаемых решений в технических и экономических приложениях.

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ІМПУЛЬСНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ

С.М. Чуйко, А.В. БЕЛУЩЕНКО

Кафедра математики

Слов'янський державний педагогічний університет

e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Припустимо T -періодичну задачу для системи $z' = A(t)z + f(t)$ некоректно поставленою для довільної неперервної функції $f(t)$. Нами досліджено умови регуляризації крайової задачі [1]

$$z' = A(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0, \quad \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \quad (1)$$

у класі функцій $z(t) \in C^1\{[0, T] \setminus \{\tau\}_I\}$; тут $A(t)$ — неперервна матриця. Позначимо $X_0(t)$ нормальну ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальну матрицю однорідної частини диференціальної системи (1),

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := -X_0(t) \int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau[,$$

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := X_0(t) \int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [\tau, T]$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau) = c$ для диференціальної системи (1) та $X(t)$ нормальну ($X(\tau - 0) = I_n$) фундаментальну матрицю однорідної частини системи з імпульсом (1):

$$X(t) = X_0(t), \quad t \in [0, \tau[; \quad X(t) = X_0(t)(I_n + S), \quad t \in [\tau, T], \quad Q := \ell X(\cdot).$$

Теорема. Якщо задача про знаходження T -періодичних розв'язків $z(t) \in C^1[0, T]$ диференціальної системи (1) некоректно поставлена і для фіксованої матриці $S \in R^{n \times n}$ має місце нерівність $\det[Q_0 - X(T)S] \neq 0$, $Q_0 := \ell X_0(\cdot)$, то для довільної неперервної функції $f(t)$ у просторі $z(t) \in C^1\{[0, T] \setminus \{\tau\}_I\}$ існує не менш ніж один розв'язок $z(t) = K[f(s)](t) - X(t)Q^+ \ell K[f(s)](\cdot)$ крайової задачі (1).

У залежності від матриці S для регуляризованої крайової задачі (1) має місце вироджений, або невироджений імпульсний вплив.

1. **Boichuk A.A., Samoilenko A.M.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ АВТОНОМНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.С. Чуйко, Ан.С. Чуйко

Кафедра математики

Славянский государственный педагогический университет

e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Для нахождения решения нетеровой ($m \neq n$) задачи

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad f \in R^n, \quad (1)$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad b^* = b(0), \quad A \in R^{n \times n}, \quad \alpha \in R^m \quad (2)$$

предложена модифицированная итерационная схема, построенная на основе метода наименьших квадратов. Здесь $Z(z, \varepsilon)$ — функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной в малой окрестности решения задачи (2) и по ε в окрестности нуля; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы.

Теорема. Пусть в критическом ($P_{Q^*} \neq 0$) случае задача (2) имеет решение $z_0(t, c_r^*) \in C^1[a, b^*]$, $c_r \in R^r$. Для каждого простого ($P_{B_0^*} = 0$, $P_{B_0^*} : R^{r+1} \rightarrow N(B_0^*)$) корня $c^* = \text{col}(c_r^*, \beta^*)$ уравнения

$$F(c^*) = P_{Q^*} \{ \varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot) \} = 0, \quad B_0 = F'_c(c^*),$$

$$\varphi_0(c^*) = \alpha \beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0), \quad f_0(t, c^*) = \beta^* [Az_0 + f] + Z(z_0, 0)$$

имеет по меньшей мере одно решение $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)], C[0, \varepsilon_0]$, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее.

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$ — матрица, $\text{rank } Q = n - r$, $P_{Q^*} : R^m \rightarrow N(Q^*)$ — ортопроектор, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши [1].

1. **Boichuk A.A., Samoilenko A.M.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Н.В. ШАРАЙ, В.М. ШИНКАРЕНКО

Кафедра диференціальних рівнянь

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Кафедра ММАЕ

Одеський національний економічний університет

e-mail:shinkar@te.net.ua, rusnat@i.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^\sigma, \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $\sigma \in R$, $p : [a, w) \rightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція; $a < w \leq +\infty$.

Розв'язок y рівняння (1), який задано на проміжку $[t_y, w) \subset [a, w)$ називаємо $P_w(\lambda_0)$ розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t \rightarrow w} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm \infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \rightarrow w} \frac{(y'')^2}{y''' y'} = \lambda_0$$

Встановлено необхідні та достатні умови існування у рівняння (1) $P_w(\lambda_0)$ розв'язків для різних дійсних значень λ_0 , а також для $\lambda_0 = \pm\infty$. Отримано асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних до другого порядку при $t \rightarrow w$. У випадку, коли $\lambda_0 = \pm\infty$ доведено наступну теорему.

Теорема. Для існування у рівняння (1) $P_w(\pm\infty)$ розв'язків, необхідно и достатньо виконання умов

$$\lim_{t \rightarrow w} p(t) \pi_w^3(t) |\ln \pi_w^2(t)|^\sigma = 0; \quad \lim_{t \rightarrow w} \int_a^t p(\tau) \pi_w^2(\tau) |\ln \pi_w^2(\tau)|^\sigma d\tau = \infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \rightarrow w$ асимптотичні розвинення:

$$\ln |y(t)| = \ln \pi_w^2(t) + \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau) \pi_w^2(\tau) |\ln \pi_w^2(\tau)|^\sigma d\tau (1 + o(1)),$$

$$\ln |y'(t)| = \ln |\pi_w(t)| + \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau) \pi_w^2(\tau) |\ln \pi_w^2(\tau)|^\sigma d\tau (1 + o(1)),$$

$$\ln |y''(t)| = \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau) \pi_w^2(\tau) |\ln \pi_w^2(\tau)|^\sigma d\tau (1 + o(1)).$$

О ПРИВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С
МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ К
ОДНОМУ СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ

С. А. ЩЁГОЛЕВ

Кафедра высшей математики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: sergas1959@gmail.com

Пусть $G = \{t, \varepsilon : t \in \mathbf{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in (0, 1)\}$

Определение 1. Скажем, что функция $f(t, \varepsilon)$ принадлежит классу $S_m(\varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если $t, \varepsilon \in G$, и 1) $f(t, \varepsilon) \in C^m(G)$ по t ; 2) $d^k f/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t, \varepsilon)$, $\sup_G |f_k^*| < +\infty$ ($0 \leq k \leq m$).

Определение 2. Скажем, что функция $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ принадлежит классу $F_{m,l}^\theta(\varepsilon_0)$, $m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если

$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon))$, причём:

1) $f_n(t, \varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$, $d^k f_n(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t, \varepsilon)$;

2) $\sum_{k=0}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^l \sup_G |f_{nk}(t, \varepsilon)| < +\infty$;

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \varepsilon, \theta, x), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(t, \varepsilon) + \varepsilon \Theta(t, \varepsilon, \theta, x), \quad (1)$$

$x, \theta \in \mathbf{R}$, $|x| \leq d$; X, Θ принадлежат классу $F_{m-1,l}^\theta(\varepsilon_0)$ относительно t, ε, θ и классу $C^q[-d, d]$ относительно x ; $\omega \in S_m(\varepsilon_0)$, $\inf_G \omega > 0$.

Для системы (1) доказано существование конечной цепочки преобразований, приводящей систему (1) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{k=1}^{m_1-1} \varepsilon^k Y_k(t, \varepsilon, y) + \varepsilon^{m_1} \tilde{Y}(t, \varepsilon, \varphi, y),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_1-1} \varepsilon^k \Phi_k(t, \varepsilon, y) + \varepsilon^{m_1} \tilde{\Phi}(t, \varepsilon, \varphi, y),$$

Y_k, Φ_k из класса $S_{m-k}(\varepsilon_0)$ по t, ε и из класса $C^{q-k+1}[-d_0, d_0]$ ($d_0 < d$) по y ; $\tilde{Y}, \tilde{\Phi}$ из класса $F_{m-m_1,l-m_1}^\varphi(\varepsilon_0)$ по t, ε, φ и из класса $C^{q-m_1}[-d_0, d_0]$ по y .

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.А. ЭБЕЛЬ

Кафедра математического моделирования
Южно-Уральский государственный университет (Национальный
исследовательский университет), Челябинск
e-mail: ebel_aa@rambler.ru

Пусть L и M – матрицы $n \times n$, $\det L = 0$, $M - (L, p)$ -регулярна ($\exists \lambda \in \mathbf{C} : \det(\lambda L - M) = 0$, $\exists p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в противном случае).

Решение задачи смешанного управления заключается в нахождении тройки $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in U_\partial^0 \times U_\partial \times H^1(R^n)$, почти всюду на $(0, \tau)$ удовлетворяющей системе леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t) \quad (1)$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$[(\lambda L - M)^{-1}L]^{p+1}(x(0) - u_0) = 0, \quad (2)$$

при этом

$$J(v_0, v) = \min_{(u_0, u) \in U_\partial^0 \times U_\partial} J(u_0, u), \quad (3)$$

$$J(u_0, u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Cx^{(q)}(u_0, u) - Cx_0^{(q)}(t)\|^2 dt + \\ + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt + \gamma \|u_0\|^2, \quad (4)$$

здесь α , β и γ – весовые коэффициенты целей качества управления, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\theta = 0, 1, \dots, p+1$, $\tau \in \mathbf{R}_+$. Справедлива

Теорема. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $\det M \neq 0$. Тогда $\forall y \in Y \exists!$ решение $(v_0, v, x(v_0, v))$ задачи (1) – (4), и

$$x(v_0, v) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[-\sum_{q=0}^p (M^{-1}(I - Q_k)L)^q M^{-1}(I - Q_k)(y + Bv)^{(q)}(t) + \right. \\ \left. + X_k^t v_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k(y + Bv)(s) ds \right].$$

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИКИ ЗАГАЛЬНОГО
РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИНГУЛЯРНО
ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ВИЩІХ ПОРЯДКІВ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА
ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

ЯКОВЕЦЬ В.П., ПАФИК С.П.

Університет менеджменту освіти НАПН України

e-mail: vasyi.yakovts@gmail.com

Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова

email:procentum35@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^{kh} A_k(t, \varepsilon) \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \quad (1)$$

де $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, – дійсні або комплекснозначні матриці n -го порядку, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $h \in N$, $t \in [0; T]$.

На систему (1) накладаємо умови:

1°. Матриці $A_i(t)$, $i = \overline{0, m}$, допускають на відріжку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε :

$$A_i(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), \quad i = \overline{0, m}.$$

2°. Матриці $A_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, $k = 0, 1, \dots$, нескінченно диференційовані на відріжку $[0, T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i^{(0)}(t)$$

системи (1) регулярна при всіх $t \in [0, T]$ і має один скінченний елементарний дільник кратністю p , і один – нескінченний кратністю q , причому $p + q = mn$.

Використовуючи теорію поліноміальних матричних в'язок і методи робіт [1, 2], побудовано асимптотичні розвинення фундаментальної системи розв'язків системи рівнянь (1). Встановлено, що за виконання умов $1^\circ - 4^\circ$ та деяких обмежень на збурювальні оператори дана система має p формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t, \mu) = u_i(t, \mu) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \mu) d\tau), \quad i = \overline{1, p},$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, і q розв'язів вигляду

$$x_j(t, \nu) = v_j(t, \nu) \exp(\nu^{-qh-1} \int_0^t \xi_j^{-1}(\tau, \nu) d\tau), \quad j = \overline{1, q},$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t, \mu)$, $v_j(t, \nu)$ – n -вимірні вектори-функції, а $\lambda_i(t, \mu)$, $\xi_j(t, \nu)$ – скалярні функції, які зображаються розвиненнями за степенями $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів цих розвинень. Виведено відповідні асимптотичні оцінки.

1. **Шкіль Н.И.** Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями // Н.И. Шкіль, И.И. Старун, В.П. Яковец. — К.: Вища школа, 1991. — 207 с.
2. **Самойленко А.М.** Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Т.П. Яценко, Т.В. Ситников

Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский национальный политехнический университет
e-mail: tat.kuw@gmail.com

Для повышения эффективности специализированной компьютерной системы в большинстве случаев желательна линейная характеристика амплитудно-частотной характеристики устройства фильтрации, которая описывается передаточной функцией вида

$$H = \frac{1 + z^{-1}}{1 + bz^{-1}}$$

Следует отметить, что при управлении цифровым фильтром необходимо осуществлять перестройку частоты среза с целью уменьшения влияния помех на полезную составляющую входного сигнала. В работе [2] получена зависимость нормированной частоты среза ω ФНЧ в зависимости от коэффициента b знаменателя передаточной функции фильтра Чебышева второго рода и уровня пульсаций в полосе пропускания

$$\cos \omega = -\frac{(1+b)^2 - 2c^2(1+b^2)}{(1+b)^2 - 4c^2b} \quad (1)$$

Исследуем асимптотическое поведение $\cos \omega$ в зависимости от $b \in [-1, 1]$ коэффициента знаменателя передаточной функции и $c \in [0, 1]$ уровня пульсации в полосе задержания. Если $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos \omega = -\frac{-2b}{1+b^2}$, что характерно для фильтра Баттерворта. Пусть $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - \delta$, где δ мало. Представим (1) в виде

$$\cos \omega = \frac{(2c^2 - 1)b^2 - 2b + (2c^2 - 1)}{b^2 - 2(2c^2 - 1) + 1}.$$

Введём новый малый параметр $\mu = 2(\delta\sqrt{2} + \delta^2)$. Получим геометрический ряд, у которого знаменатель $\frac{2b\mu}{1+b^2}$ по модулю меньше единицы

$$\cos \omega = -\frac{2b}{1+b^2} + \mu \left(\frac{1-b^2}{1+b^2} \right)^2 \left(1 + \mu \frac{2b}{1+b^2} + \left(\mu \frac{2b}{1+b^2} \right)^2 + \dots \right) \quad (2)$$

Сходимость ряда (2) можно ускорить, если рассматривать его при $|\frac{2b\mu}{1+b^2}| \leq 0.5$. При этом $c \in [0.5, 0.9]$. Сходимость при $c \in [0, 0.5]$ можно улучшить, рассматривая другую асимптотическую формулу. За малый параметр возьмём $\epsilon = 2c^2 \in (0, 0.5)$. Тогда

$$\cos \omega = -1 + \epsilon \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^2 \left(1 + \epsilon \frac{2b}{(1+b)^2} + \left(\epsilon \frac{2b}{(1+b)^2} \right)^2 + \dots \right) \quad (3)$$

Если $c \in [0, 0.5]$ сначала используется ряд (2) при $b \in [-1, b_2(\epsilon)]$, а при $b \in [b_2(\epsilon), 1]$ ряд (3). Причём $b_2(\epsilon)$ тем ближе к -1, чем меньше ϵ .

Когда $c \in [0.9, 1]$ при $b \in [-1, b_1(\chi)]$ используется формула ($\chi = 2(2(1-c) - (1-c)^2)$)

$$\cos \omega = 1 - \chi \left(\frac{1+b}{1-b} \right)^2 \left(1 - \chi \frac{2b}{(1-b)^2} + \left(\chi \frac{2b}{(1-b)^2} \right)^2 - \dots \right) \quad (4)$$

где $b_1(\chi)$ тем ближе к 1, чем меньше χ . При $b \in [b_1(\chi), 1]$ используется формула (2). Задавая уровень погрешности, можно из (3) найти $b_2(\epsilon)$, начиная с которого $\cos \omega = -1$. Аналогично из (4) ищется $b_1(\chi)$, до которого $\cos \omega = 1$.

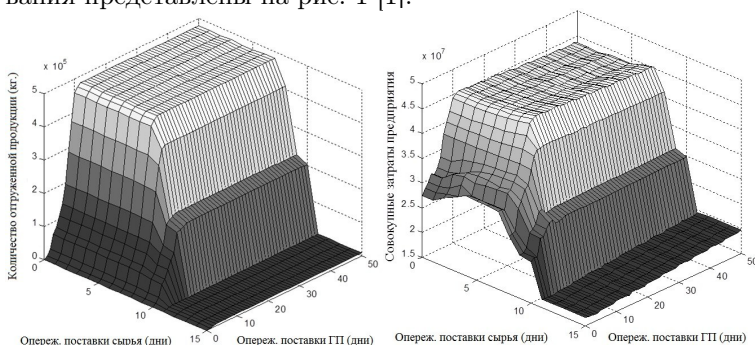
1. **Демидович Б. П.** Основы вычислительной математики / Демидович Б.П., Марон И.А. :1. ФМЛ, М.,1960.
2. **Дикусар Е.В.** Аппроксимация характеристики управления полиномиальной компонентой первого порядка / 2. Е.В.Дикусар, А.А.Швец, Г.А.Грицкевич. : 2. Праці одеськ. політехн. ун-та – 2011 – Вип.1(35) С.141-146.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

А.Г. Бутрин

Южно-Уральский государственный университет (Национальный
исследовательский университет), Челябинск
e-mail: butrin_ag@mail.ru

Сегодня, в условиях протекания интеграционных процессов, ключевой задачей развития большинства промышленных предприятий становится обеспечение адаптивности, устойчивости, конкурентоспособности, эффективности. Существенные резервы заключены в применении логистического интегрированного управления поставщиками, перевозчиками, производителями, дилерами, дистрибьюторами и потребителями как единым целым. Для реализации этих резервов необходимо разработать метод оптимизации и построить надежную экономико-математическую модель, направленную на определение и достижение оптимальных параметров потоковых процессов. Критерием оптимизации является минимум интегральных затрат в потоковой цепи «поставщик–производитель–потребитель». Методы: системный, межсистемный и синергетический подходы, экономико-математическое моделирование, методы логистики и управления цепями поставок, обобщения и синтеза, эксперимента. Результаты моделирования представлены на рис. 1 [1].



1. **Бутрин А. Г.** Проектирование и оптимизация бизнес-процессов интегрированных предприятий: монография / А.Г. Бутрин, В.И. Цаплин. – Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – XLIII, 313 с.

ON THE QUALITATIVE INVESTIGATION
OF LIÉNARD POLYNOMIAL SYSTEMS

V.A. GAIKO

United Institute of Informatics Problems

National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: valery.gaiko@gmail.com

In this talk, we consider the general Liénard polynomial system with an arbitrary (but finite) number of singular points in the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + \beta_1 x + \dots + \beta_{2l} x^{2l}) \\ &\quad + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{2k} x^{2k}).\end{aligned}\tag{1}$$

Applying a canonical system with field rotation parameters,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + \beta_1 x \pm x^2 + \dots + \beta_{2l-1} x^{2l-1} \pm x^{2l}) \\ &\quad + y(\alpha_0 + x + \alpha_2 x^2 + \dots + x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}),\end{aligned}\tag{2}$$

where $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2l-1}$ are fixed and $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ are field rotation parameters, and using geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles, we carry out the qualitative investigation of (1) and prove the following theorem [1, 2].

Theorem. *The general Liénard polynomial system (1) can have at most $k+l$ limit cycles, k surrounding the origin and l surrounding one by one the other its singularities.*

1. **Gaiko, V. A.** The applied geometry of a general Liénard polynomial system / V. A. Gaiko // Appl. Math. Letters. – 2012. – Vol. 25, No. 12. – P. 2327–2331.
2. **Gaiko, V. A.** Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions / V. A. Gaiko // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. – 2012. – Vol. 4, No. 3. – P. 242–254.

О ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. С. СЕРГЕЕВ

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Москва, Россия
e-mail: vsergeev@ccas.ru

Рассматриваются системы, описываемые интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + \mu f(t) + F(x, y, t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где A – постоянная матрица, $\mu \ll 1$, интегральное ядро $K(t)$ непрерывно и экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, функция $F(x, y, t)$ аналитическая по x, y в некоторой окрестности нуля с непрерывными коэффициентами разложений в степенной ряд, экспоненциально стремящимися к постоянным при $t \rightarrow +\infty$, y – нелинейный аналитический функционал в интегральной форме. Малое возмущение $\mu f(t)$ – гладкая экспоненциально предельно периодическая функция t , т.е. являющаяся суммой периодической функции периода T и функции, экспоненциально стремящейся к нулю.

Если нулевое решение линеаризованного однородного уравнения экспоненциально устойчиво, то каждое решение полного нелинейного уравнения в некоторой окрестности нуля будет предельно периодическим. Решение представляется степенными рядами по малому параметру μ и произвольным начальным значениям $x(0)$.

В критическом случае пары чисто мнимых корней при резонансе, когда собственная частота, отвечающая чисто мнимым корням характеристического уравнения, совпадает с частотой $T/2\pi$, показано, что существует семейство предельно периодических решений, которые могут быть представлены степенными рядами по малому параметру $\mu^{1/(2m+1)}$ и произвольным начальным значениям некритических переменных. Получены условия существования таких решений, устанавливаемые по членам некоторого $2m+1$ -го порядка уравнений. Рассмотрен случай функции $F(x, t)$

периодической по t с периодом T (либо экспоненциально предельно периодической). Получены условия существования при резонансе предельно периодических решений, определяемых членами второго порядка и заданных степенными рядами по $\mu^{1/2}$.

Указатель

Gaiko V.A., 108
Kupenko O.P., 73
Savostyanova I.M., 86
Volchkov Vit.V. , 86
Zadoianchuk N.V., 73

А

Акуленко Л.Д., 36
Арсирий А.В., 37
Асланов С.К., 48
Асроров Ф.А., 38

Б

Бардин А.Е., 39
Баринова Т.Ю., 40
Белозерова М. А., 42
Белущенко А.В., 98
Бойцова И.А., 43
Бутрин А.Г., 107
Бігун Я.Й., 41

В

Волчков В.В., 44
Волчков Вит. В., 44
Волчкова Н.П., 45

Г

Городецкий В.В., 47

Д

Драгуновский Н.Н., 48
Дрінь Я.М., 49

Ж

Жуковский В.И., 51

З

Загородний Ю.В., 53
Загребина С.А., 54
Замышляева А.А., 55
Зернов А.Е., 56
Зернов О.Є., 57

К

Калинин А.И., 58
Капустян В.Е., 61
Капустян В.О., 59
Капустян О.А., 59
Капустян О.В., 60
Карпычева М.Л., 64
Келлер А.В., 62
Келюх И.В., 56
Керекеша Д.П., 63
Кичмаренко О.Д., 64, 66
Козьма А.А., 67
Колмакова Л.Н., 68
Кольцова Л.Л., 69
Комарницкий А.Л., 68
Комлева Т.А., 70
Король І.І., 71
Костин А.В., 40, 69
Кудрявцев К.Н., 72
Кузіна Ю.В., 57
Кусик Л.И., 74

Л

Лавринович Л.И., 75
Лещенко Д.Д., 36
Любарщук Є.А., 41

М

Мазур О.К., 59

Манакова Н.А., 76
Мартинюк О.В., 47
Матвеева О.П., 77
Молчанюк И.В., 78

Н

Навроцкий С.С., 79

О

Олейник Е.А., 85
Очаковская О.А., 80

П

Паньков О.А., 60
Пафик С.П., 103
Перестюк Ю.М., 81
Плотников А.А., 66
Плотников А.В., 70
Плотникова Л.И., 78
Полетаева О.В., 84
Пышнограев И.А., 61
Пічкур В.В., 83

Р

Рачинская А.Л., 36
Рузакова О.А., 85

С

Сагадеева М.А., 87
Сайтієва Т.В., 88
Самкова Г.Е., 79
Сасонкіна М.С., 89
Семчишин Г.Я., 90
Сергеев В.С., 109
Ситников Т.В., 105
Скрипник Н.В., 84
Сливка-Тилищак Г.І., 91
Солдатова Н.Г., 39
Стабулит И.С., 92

Страхов Є.М., 83
Сукачева Т.Г., 77

Т

Теплінський Ю.В., 93
Терзийский А.Н., 37
Тхай В.Н., 94

Х

Харьков В. М., 96
Худяков Ю.В., 97

Ц

Царенко А.П., 48

Ч

Чуйко Ан.С., 99
Чуйко А.С., 99
Чуйко С.М., 98

Ш

Шарай Н.В., 100
Шинкаренко В.М., 100

Щ

Щёголев С.А., 101

Э

Эбель А.А., 102

Я

Яковець В.П., 103
Яровий А.Т., 88
Яценко Т.П., 105